D5

DEHNUNGSUNTERSUCHUNGEN AN ABBILDUNGEN VON SPHÄREN AUF SPHÄREN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

HOHEN MATHEM.-NATURW. FAKULTÄT

DER

RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BONN

H - Hefter

1980

Angefertigt mit Genehmigung der
Gedruckt
Mathem.-naturw. Fakultät der Universität Bonn
Referent: Prof. Dr. R. Olivier
Korreferent: Prof. Dr. W. Klingenberg

Tag der Promotion: 3.7.80

DEHNUNGSUNTERSUCHUNGEN

AN ABBILDUNGEN VON

SPHÄREN AUF SPHÄREN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

HOHEN MATHEM.-NATURW. FAKULTÄT

DER

RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BONN

VORGELEGT VON HARALD HEFTER AUS WILNSDORF-WILDEN

BONN 1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vor langer Zeit sah ich ein Bild
mit einem roten, blauen und gelben Ball.
Die waren groß, kugelrund und prall.
Sie schwebten über grauem Grund,
machten das Gemälde schön bunt.
Es wirkte heiter, fröhlich und mild,

das farbige Bild der ersten Liebe.

Und während ich schaute, kam Leben ins Bild.
Die Bälle bewegten sich, wurden wild.
Ich schrie:"Zurück!". Doch nichts nützte mein Mahnen.
Die Bälle entschwanden. Zurück blieb im Rahmen

das graue Bild der verlassenen Liebe.

Es lockt der Mond mich aus dem Haus.
Ich folge seinem Schein.
Am Ufer ruft der Fluß mir zu:
"Was willst Du hier allein?"

Ich flüstere ganz leis' zurück.
Die Stimme dringt nicht weit.
"Sei stille nur, Du dummer Fluß!
Wir sind doch heut' zu zweit."

"Ich sehe nichts", brummt nun der Fluß,
"als nur alleine Dich."
"Ich seh' Dich bloß als Wasser an.
Ist drinnen denn kein Fisch?"

Stumm wälzt der Fluß die Fluten fort.
Er hat mich gut verstanden.
Kann man die Fische auch nicht seh'n,
sie sind dennoch vorhanden.

VORWORT

Die vorliegenden Seiten vermag ich nicht als das Ergebnis meiner bisherigen Beschäftigung mit Mathematik anzusehen. Sie sind für mich Überreste eines Entwicklungsstadiums, die zurückblieben, nachdem das Leben aus ihnen entschwand. Das Leben aber, das durch sie geformt wurde, wird ihre Spuren immer tragen, fragend, wie wohl ein Werk geschaffen werden kann, daß Leben des Werkes und Tod des Meisters nicht mehr zu trennen, eins sind.

Die Auswirkungen der zahlreichen betreuenden und unterstützenden Unterhaltungen mit R.Olivier können durch ein "Danke" weder beendet noch vergolten werden. Ideen leben.

Ich bin auch W.Ballmann für seine Offenheit und Gesprächsbereitschaft dankbar, die mich ahnen läßt, wieviel man von einer harmonierenden Arbeitsgruppe profitieren kann.

Mehrere Gespräche mit Mitgliedern des Bonner Mathematischen Institutes und Gästen der beiden Bonner Sonderforschungsbereiche haben mich und damit diese Arbeit beeinflußt. Ich danke für diese Gespräche. Besonders hilfreich war der Hinweis von T. Iwaniec (Warschau) auf die Arbeiten von Y. Reshetnyak.

Einen raschen Einblick in die Arbeit gewährt die Zusammenfassung. Zu Anfang jedes Kapitels fasse ich dessen Inhalt noch einmal kurz zusammen. Die Idee eines längeren Beweises kann leicht aus der zugehörigen Beweisskizze entnommen werden. So möge sich nun jeder Leser das herauspicken, worauf er Appetit verspürt.

Bonn, im Mai 1980.

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
	Vorwort	(iv)
	Inhaltsverzeichnis	(v)
	Zusammenfassung	(vi)
	Bezeichnungen	(ix)
O.	EINLEITUNG	1
I.	ABBILDUNGEN MIT DEHNUNG KLEINER ALS ZWEI	6
	§ 1 Zerstreute und gesammelte Mengen	6
	§ 2 Eine surjektive Abbildung mit Dehnung kleiner zwei hat Grad eins oder minus eins	8
II.	ABBILDUNGEN MIT DEHNUNG GLEICH ZWEI	1o
	§ o Hopfkonstruktion und Dehnung	1o
	§ 1 Nichtsuspensionen mit Dehnung zwei sind Faserungen	17
	§ 2 Betrachtung der Mengen $H_2^3(2)$, $H_4^7(2)$, $H_8^{15}(2)$	21
	§ 3 Welche Klassen sind durch normierte bilineare Abbildungen repräsentierbar ?	29
	§ 4 Dehnung zwei und eindimensionale Dehnungsmenge Δ_F und $T\Delta_f$	33
III.	ABBILDUNGEN MIT DEHNUNG GRÖßER ALS ZWEI	37
	§ o Eine spezielle Deformation	37
	§ 1 Wann ist der Lift einer Abbildung nach S^2 eine Suspension ?	4o
	§ 2 Jede nichtnullhomotope Abbildung von S^m, m>3, nach S^2 besitzt mindestens die Dehnung drei	42
	§ 3 Filtrierung und Dehnung	46
IV.	DEHNUNG, GRAD UND HOPFINVARIANTE	49
	§ o Vorbereitungen und die Sätze von Reshetnyak	49
	§ 1 Beweis von $d(k,n) > \sqrt[k]{n}$	52
	§ 2 Allgemeine obere und untere Schranken für die Dehnung einer Klasse mit gegebener Hopfinvariante	54
V.	BEISPIELE	59
	§ 1 Untere Schranken für Abbildungen der Zweisphäre auf sich	59
	§ 2 Eine minimale Abbildung von S^6 nach S^3	65
	§ 3 Dehnungsmenge, Minimalität und Fortsetzbarkeit	68
	§ 4 Deformation einer Abbildung von S^5 nach S^3	77
VI.	PROGRAMM	86
	LITERATURVERZEICHNIS	83

ZUSAMMENFASSUNG

Wir haben uns mit folgendem Problem beschäftigt:

Welche Eigenschaften lassen sich von einer differenzierbaren Abbildung f der m-dimensionalen Standardsphäre (vom Radius 1) auf die n-dimensionale Standardsphäre (vom Radius 1) , $m \geq n$, zeigen, wenn eine obere Schranke für die Dehnung von f $\delta(f) := \sup\{\|f_*|_p\| \mid p \in S^m\}$ angegeben ist, und welche untere Schranke für $\delta(f)$ gibt es, wenn f gegebene Eigenschaften hat?

Wenn f surjektiv ist und $\delta(f)<2$, besitzt f ein Homotopieinverses. (I.2.1)

Wenn f keine Einhängung und $\delta(f)=2$ ist, muß $m=2n-1$, $n \in \{2,4,8\}$ und f die Hopfkonstruktion einer normierten bilinearen Abb. $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sein; d.h. f ist eine der bekannten Hopffaserungen. (II.1.1)

Die von HURWITZ und RADON angegebenen "Scharen orthogonaler Matrizen" (spezielle normierte bil. Abb. $B: \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k+1<n$,) liefern durch die Hopfkonstruktion Sphärenabbildungen, die Einhängungen sind, Dehnung zwei besitzen und deren Homotopieklassen im Bild des stabilen J-Homomorphismus liegen. Eine ältere Vermutung von LAM und WOOD lautet " Jede stabile Homotopieklasse, die die Hopfkonstruktion einer norm. bil. Abb. als Repräsentanten besitzt, liegt im Bild des stab. J-Hom. Da J(B) Dehnung zwei hat und Dehnung zwei eine starke Regularitätsforderung an eine Sphärenabb. ist, können wir diese Vermutung bestätigen, indem wir die Existenz eines regulären Wertes aufweisen, dessen Urbild eine Standardsphäre ist. (II.3.3) (Ob es außer den Einhängungen von Hopfkonstruktionen norm. bil. Abb. weitere differenzierbare nicht nullhomotope Sphärenabbildungen mit Dehnung zwei gibt, ist unbekannt

Wie der Beweis von (II.3.3) zeigt, ist es nützlich, die Menge der Tangentialvektoren zu studieren, die maximal gedehnt werden. Eine nichtnullhomotope Abb. $f:S^m \to S^n$, $m>n$, mit Dehnung zwei, kann nicht das Tangentialbündel einer 1-dim. abgeschlossenen Untermgf. von S^m als Dehnungsmenge besitzen. Den einzigen nicht offensichtlichen Fall $m=n+1>3$ beweist man mit dem BORSUK-ULAM-Theorem. (II.4.3)

Ist f eine Abb. in eine Sphäre, die in Sphären gefasert ist, kann man f nach Auswahl eines Nordpoles p und eines Südpoles -p in S^m so deformieren, daß das Bild jedes nördlichen Halbmeridians senkrecht zu den Fasern in der Bildsphäre verläuft, aber das Bild jedes südlichen Halbmeridians ganz in der Faser durch das Bild des Südpoles liegt. Daraus ergibt sich, daß ein Lift $\bar{f}:S^m \to S^3$ einer Abb. $f:S^m \to S^2$, $m>3$, mit $\delta(f)<4$ eine Einhängung sein muß.(III.1.1)

Als weitere Anwendung dieser Methode, eine Abb. nach S^3 in einen horizontalen und in einen vertikalen Teil zu zerlegen, erhält man den Satz, daß jede Abb. nach S^2, von einer Sphäre der Dimension $m>3$ mit Dehnung kleiner drei nullhomotop ist. $\delta(f)< 3$ impliziert die Existenz einer Abb. $i:S^3 \to S^m$, wenn f nichtnullhomotop ist, so daß für einen Lift $\bar{f}:S^m \to S^3$ $\bar{f}\circ i:S^3 \to S^3$ Grad $\neq 0$ hat. (III.2.1)

Im Fall der nichtendlichen Homotopiegruppen von Sphären kann man ein anderes Problem zusätzlich betrachten:

Wächst die Anzahl der Homotopieklassen, die einen Repräsentanten mit Dehnung kleiner gleich s besitzen, polynomial mit steigender Dehnung s?

OLIVIER hat vermutet, daß das Infimum aller Dehnungen von C^1-Abb. der S^k auf sich mit Grad n, größer als $\sqrt[k]{n}$ ist, wenn $k>1$ und $n>1$ ist.

Diese Vermutung bestätigen wir ebenfalls. Eine stetige Abb. f mit $\delta(f)=\sqrt[k]{n}$ ist auf einer offenen,dichten Teilmenge lokal topologisch, wenn sie Grad n hat. Durch Volumenbetrachtungen erhält man dann einen Widerspruch. (IV.1.5) Mit Ergebnissen aus (9) erhält man für das oben genannte Infimum d(k,n) die Abschätzung: $\sqrt[k]{n} < d(k,n) \leq C(k)\cdot\sqrt[k]{n}$, $C(k)\in$

Ist w eine 2k-Form auf S^{2k} mit $\int_{S^{2k}} w = 1$, und $f:S^{4k-1} \to S^{2k}$ eine C^∞-Abb. , so ist für eine 2k-Form α mit $\Delta\alpha=f^*w$ $\int_{S^{4k-1}} \delta\alpha\wedge f^*w$ die Hop invariante von f. Standardabschätzungen für die 1.Ableitungen von α zeigen, daß eine Konstante $C_1(k)$ existiert und eine Abb. $f:S^{4k-1} \to S^{2k}$ mit Hopfinvariante $n\in\mathbb{N}$ Dehnung größer gleich $C_1(k)\cdot\sqrt[4k]{n}$ haben muß. Es gibt auch eine Konstante $C_2(k)$, so daß zu jedem $n\in\mathbb{N}$ eine Abb. von S^{4k-1} nach S^{2k} mit Hopfinvariante n und Dehnung kleiner gleich $C_2(k)\cdot\sqrt[4k-1]{n}$ konstruiert werden kann. (IV.2.2)

Mit Hilfe der Umlaufzahl beweist man $d(2,3)>2$ (V.1.2). Aus (9) we man $d(2,3)<3$. Das widerspricht der Vermutung $d(k,n)\in\mathbb{N}$. (Es ist nich bekannt, ob es eine Homotopieklasse $\alpha\in\pi_m(S^n)$, $m>n$, gibt, so daß das Infimum der Dehnungen der C^1-Repr. von α keine natürliche Zahl ist.

In (V.2.2) geben wir das interessante Beispiel einer differenzier baren Abb. $f:S^6 \to S^3$ mit Dehnung drei an, das in seiner Homotopiekla minimale Dehnung besitzt.

Die Beweistechniken sind fast für jeden Satz verschieden. Dem Dil ma, einerseits die Methoden ausführlich darzustellen, andererseits j doch den Leser nicht durch langatmige Beschreibungen der detaillierte Untersuchungen der Sphärengeometrie zu ermüden und die Beweise unübe sichtlich zu machen,konnten wir kaum entrinnen. Wir hoffen aber, da die Arbeit durch die z.T. knappen Formulierungen nicht an Lesbarkei gebüßt hat.

BEZEICHNUNGEN

Symbol	Seite
$\tilde{\delta}(f), \delta(f,x,v), \delta(f,x), \delta(f), \delta<f>$	1
$U(p;\varepsilon)$	3
$H(p), S^{n-1}(p) := H(p) \cap S^n$	3
$G(p,q), G(p_1,\ldots,p_l), G(p,-p;u)$	3
$Q(p,n)$	4
$S(f), S(f,e_{m+2}); S(f,q,p,h)$	4;68
$\Sigma: \pi_m(S^n) \to \pi_{m+1}(S^{n+1})$	4
$R^{m+1}_1, R^{n+1}_2 \subset \mathbb{R}^{m+n+2}, S^m_1, S^n_2 \subset S^{m+n+1}$	10
$C^1(o,o;\pi/2,\pi); C^1(o,o;\pi,\pi); C^1(\pi/2,-\pi/2;\pi/2,\pi/2)$	11;68;70
$J(B), J(B,h), J(u,B,h), J(S^m_1, S^n_2, u, B, h); \vec{J}$	11;23
$C(t) \in R$	13
$<q_1,..q_r>, <q_1,\ldots,q_r>^{\perp}$	17
$\gamma(f), \gamma(\alpha)$	17
$N_{k+1,m}(R^n), \; N'_{k+1,m}(R^n)$	21
$G^k(m)$	22
$\Delta(f), T\Delta_x(f) = T\Delta_x f \;,\; \bigcup_{x \in M} T\Delta_x(f) = T\Delta_f, \Delta_f := \Delta(f)$	23
$H^m_n(s); \bar{H}^{k+m}_n(2)$	24;25
Φ, Ψ	25
$\nu; \nu^2, \eta^2$	29;32
$B_{k+1,m}(R^n)$	32
$S^m \# S^n, h \# g$	33
$filt(f), filt<f>$	46
$d(k,n)$	49
$w, \quad K(A), q(A), \; W^i_s(U,R^k), \| \quad \|_{W^i_s(U,R^k)}$	50
$d(x,f), \lambda(x,f), J(x,f)$	50
$\nu(y,f\|G), N(y,f\|G,G)$	51
$\bullet, \Delta, \delta, d, \Delta, G$	55

0. EINLEITUNG

In der Einleitung sollen einige generelle Gesichtspunkte der Variationsrechnung vorgestellt werden, unter denen man das Funktional Dehnung betrachten kann und die einen Teil der vorliegenden Resultate motivieren. GROMOV hat diese allgemeinen Fragestellungen ausführlicher behandelt und eine Arbeit darüber geschrieben, die wohl bald veröffentlicht wird. Für eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen E und F definiert man die Dehnung oder Dilatation so:

$$\bar{\delta}(f) := \sup\left\{ \frac{d_F(f(x),f(y))}{d_E(x,y)} \;\middle|\; (x,y) \in E \times E,\ x \neq y \right\}$$

Der Titel der Arbeit läßt aber schon darauf schließen, daß wir uns lediglich für spezielle Abbildungen und spezielle metrische Räume interessieren, für stetige und differenzierbare Abbildungen zwischen kompakten riemannschen Mannigfaltigkeiten. In ( ) wurde die Dehnung einer differenzierbaren Abbildung $f: M \to N$ zwischen kompakten riem. Mfg. mit Hilfe des Differentials definiert:

$$\delta(f,x,v) := \| f_* |_x(v) \| \,/\, \| v \|, \quad o \neq v \in T_xM$$

$$\delta(f,x) := \| f_* |_x \|$$

$$\delta(f) := \sup\{ \delta(f,x) \mid x \in M \}$$

$$\delta\langle f \rangle := \inf\{ \delta(g) \mid g \text{ ist differenzierbarer Repräsentant der Homotopieklasse von } f. \}$$

Für diffb. Abb. gilt $\bar{\delta}(f)=\delta(f)$. Das Zeichen $\delta(f)$ wird nur dann ver-

wendet, wenn von der Abb. f bekannt ist, daß sie diffb. ist.

Wir betrachten also auf der Menge $C^0(M,N)$ der stetigen Abbildungen von M nach N das Funktional Dehnung:

$\bar{\delta}: C^0(M,N) \to \mathbb{R}^+ \; ; \; g \mapsto \bar{\delta}(g)$

Sei d eine positive reelle Zahl. Dann stellt sich natürlicherweise

(0.1.1) Problem : Wieviele Homotopieklassen von stet. Abb. zwischen M und N gibt es, die einen Repr.h besitzen, der Dehnung $\bar{\delta}(h) \leq d$ hat ?

Eine grobe Abschätzung für die gesuchte Anzahl wäre schon ein gutes Ergebnis, da i.a. nicht einmal die Homotopiegruppen eines top. Raumes bekannt sind. Schränkt man $\bar{\delta}$ auf eine Homotopieklasse $<f>$ ein, erhält man die folgenden natürlichen Probleme:

(0.1.2) Problem : Kann man $\delta<f>$ bestimmen ?
Gibt es eine differenzierbare Abbildung $g \in <f>$, so daß $\delta<f> = \delta(g)$ ist ?
Welche Strukturen besitzt die Menge der diffb. Abb. $g \in <f>$ mit $\delta(g) = \delta<f>$?

Zu diesem Problem ist noch zu bemerken, daß man wegen der Kompaktheit von M nach dem ASCOLI-Theorem immer eine stet. Abb.g mit $\bar{\delta}(g)$ gleich $\delta<f>$ hat. (0.1.1) und (0.1.2) dienen uns lediglich als Leitlinien für die Untersuchung von Sphärenabbildungen. Wir beschrän-

ken uns fast ausschließlich auf den Fall, wo M und N Standardsphären vom Radius eins mit der vom euklidischen Raum induzierten Metrik sind. Wir nehmen ferner $M=S^m$ und $N=S^n$, $m \geq n \geq 2$ an, da für $m > n = 1$ und $1 \leq m < n$ $\pi_m(S^n) = o$ ist. Auch der Fall $m=n=1$ ist klar: deg: $\pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus, es gibt $2[d]+1$ verschiedene Homotopieklassen, die einen Vertreter mit Dehnung kleiner gleich d besitzen, $\delta<f> = |\deg(f)|$, die Abbildung $S^1 \to S^1$; $z \mapsto z^{\deg(f)}$ ist differenzierbar und minimal in <f>, eine minimale Abb. ist durch das Bild von $i \in S^1$ und den Grad festgelegt, die minimalen Abbildungen bilden eine S^1.

Bevor wir uns mit den weniger trivialen Fällen beschäftigen, wollen wir noch einige Bezeichnungen und häufig benutzte Argumente erwähnen. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Teilmenge. con(M) ist die konvexe Hülle. Sei $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. $U(p;\varepsilon)$ ist die offene ε-Umgebung von p in S^n. H(p) ist die Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$, die orthogonal zu dem von p erzeugten 1-dimensionalen Unterraum ist. $S^{n-1}(p) = H(p) \cap S^n$ soll der durch p festgelegte Äquator sein. Ist q ein weiterer, nicht zu p konjugierter Punkt, so ist G(p,q) die kürzeste Geodätische von p nach q. Analog bezeichnet $G(p_1,\ldots,p_1)$ die stückweise geodätische Kurve auf S^n, die p_1 mit p_2, p_2 mit p_3 usw. und schließlich p_{1-1} mit p_1 geodätisch verbindet. G(p,-p;u) ist die eindeutig bestimmte Geodätische von p nach -p durch $u \in H(p)$. Wenn nicht anders erwähnt, sind alle Geodätischen normal, d.h. nach Bogenlänge parametrisiert. Ist $f: S^m \to S^n$ eine surjektive Abb. mit Dehnung d, gilt:

Für alle $x \in f^{-1}(p)$ und alle $y \in f^{-1}(-p)$ ist $d(x,y) \geq \pi/d$.

Für d=2 folgt daraus $y \in \overline{U(-x;\pi/2)}$. Ist d=2 und $\{\pm x\} \in f^{-1}(p)$, so ist $f^{-1}(-p) \subset S^{n-1}(x)$. Oft denken wir uns S^n als Quotient dargestellt: S^n entsteht aus $[o,\pi]\times S^{n-1}(p)$ durch Identifizieren von $\{0\}\times S^{n-1}(p)$ zu dem Punkt p und von $\{\pi\}\times S^{n-1}(p)$ zu -p. Die Identifizierungsabb. lautet: $Q(p,n):[o,\pi]\times S^{n-1}(p) \to S^n$; $(t,u) \mapsto \cos(t)\cdot p + \sin(t)\cdot u$ Wir werden einige Sphärenabbildungen mit Hilfe der beiden Parameter t und u angeben. Es ist dann klar, daß die Abbildungsvorschrift mit der Identifikation verträglich ist. Als Beispiel geben wir die Suspension einer stetigen Abb. $f: S^m \to S^n$ an. Ist S^m in S^{m+1}, S^n in S^{n+1} durch die ersten m+1 resp. n+1 Koordinaten definiert, bezeichnet $S(f,e_{m+2})$ die Abb. $[o,\pi]\times S^m(e_{m+2}) \to [o,\pi]\times S^n(e_{n+2})$; $(t,u) \mapsto (t,f(u))$, die auf den Quotienten die nichtreduzierte Suspension induziert, die ebenfalls mit $S(f,e_{m+2})$ bezeichnet werden soll. Falls $\bar{\delta}(f) > 1$ ist, gilt $\bar{\delta}(f)=\bar{\delta}(S(f,e_{m+2}))$. Wenn bei der Suspensionskonstruktion kein anderer Punkt p verschieden von e_{m+2} ausgezeichnet ist, nehmen wir immer an, daß in den Punkten $\pm e_{m+2}$ und $\pm e_{n+2}$ die Abb. f eingehängt wird. In diesem Fall schreiben wir kürzer S(f) statt $S(f,e_{m+2})$. Die Einhängung liefert einen Homomorphismus $\Sigma: \pi_m(S^n) \to \pi_{m+1}(S^{n+1})$; $\langle f \rangle \to \langle S(f) \rangle$. Durch Iteration erhält man Abb. $S^k(f): S^{m+k} \to S^{n+k}$ und einen Homom. Σ^k. Es ist wohlbekannt, daß für $m < 2n-1$ Σ ein Isomorphismus ist, d.h. die Folge von Homomorphismen und Homotopiegruppen wird stabil:

$$\pi_m(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{m+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{\Sigma} \dots \xrightarrow{\Sigma} \pi_{m+r}(S^{n+r}) \approx \pi^s_{m-n}, \quad \mathbb{N} \ni r > m-2n+1$$

(0.1.3) Problem : Läßt sich $\lim_{k\to\infty} \delta\langle S(f)\rangle$ berechnen ?

Wird die Folge $\{\bar{\delta}(S^k(f))\}_{k\in\mathbb{N}}$ stabil ?

Für eine Abb. $f:S^n \to S^n$ zwischen Sphären gleicher Dimension läßt sich eine sehr einfache Abschätzung angeben:

(0.1.4) Behauptung : $2 \leq \lim_{k\to\infty} \delta\langle S^k(f)\rangle < 3$

Beweis : durch Induktion

Wie wir oben bemerkten, ist die Folge $(\delta\langle S^k(f)\rangle)$ monoton nicht steigend. Die Behauptung ist daher bewiesen, wenn wir zu jedem vorgegebenen Grad eine Sphärenabb. mit diesem Grad und der Dehnung kleiner als drei angeben. In (9;S.57) wurde eine Abb. F_3^2 von S^2 nach S^2 mit Dehnung kleiner drei konstruiert. Wir nehmen nun an, $F_{n+1}^n : S^n \to S^n$ mit $\deg(F_{n+1}^n)=n+1$ und $\bar{\delta}(F_{n+1}^n)=d_n < 3$ sei konstruiert. Wähle d_{n+1} so, daß $d_n = d_{n+1}\cdot\cos(\frac{3\pi}{2d_{n+1}} - \pi/2)$ gilt. Es ist $d_n < d_{n+1} < 3$. Die stet. Abb

$$F_{n+2}^{n+1}: S^{n+1} \to S^{n+1}$$

$$(t,u) \mapsto \begin{cases} (d_{n+1}\cdot t\ ,\ u\ ) & \text{für } t\in[o,\pi/d_{n+1}] \\ (2\pi - d_{n+1}\cdot t,\ F_{n+1}^n(u)\ ) & \text{für } t\in[\pi/d_{n+1}, 2\pi/d_{n+1}] \\ (\ o\ ,\ u\ ) & \text{für } t \text{ sonst} \end{cases}$$

hat Grad n+2. Mit den Rechnungen aus (9;S.57) folgt sofort, daß die Dehnung von F_{n+2}^{n+1} d_{n+1} ist. (Die Folge der d_n ist streng monoton steigend und besitzt 3 als Limes, da 3 Fixpunkt der Abbildung $D \to \mathbb{R}^1$; $x \to x\cdot\cos(\frac{3\pi}{2x} - \pi/2)$ ist; $D=\mathbb{R}^1-\{o\}$.)

Für Abbildungen zwischen Sphären unterschiedlicher Dimension ist i.a. nicht einmal eine Abschätzung bekannt. In einigen Spezialfällen werden wir auf (0.1.3) zurückkommen.

I. ABBILDUNGEN MIT DEHNUNG KLEINER ALS ZWEI

Für nichtnullhomotope Abb. zwischen Sphären unterschiedlicher Dimension hat LAWSON 1968 bewiesen, daß die Dehnung mindestens 2 sein muß. Für nichtnullhomotope Abb. einer Sphäre auf sich bewies OLIVIER schon 1966, daß gerader Grad Dehnung größer gleich 2 impliziert. Es blieb nur noch die Frage offen, ob auch bei ungeradem Grad größer als 1 die Dehnung größer gleich 2 sein muß. Unser Satz 1 beantwortet diese Frage positiv. Der Beweis von Satz 1 liefert auch die früheren Ergebnisse, da wir zeigen, daß eine surjektive Sphärenabb. mit Dehnung kleiner als zwei ein Homotopieinverses besitzt. § 1 erläutert eine alte Definition von ZINDLER. In § 2 beweisen wir Satz 1.

§ 1 Zerstreute und gesammelte Mengen

(I.1.1) Definition : $M \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist gesammelt genau dann, wenn es einen Punkt $p \in S^n$ gibt, so daß M in der offenen $\pi/2$-Umgebung von p enthalten ist.

$M \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist zerstreut genau dann, wenn M nicht gesammelt ist.

(I.1.2) Lemma : Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) M ist zerstreut.

(ii) $\operatorname{con}(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ enthält den Nullpunkt.

(iii) Es gibt $r \leq n+2$ verschiedene Punkte $p_1, \ldots, p_r$ aus M, die auf S^n zerstreut liegen.

(iv) Es gibt $r \in n+2$ verschiedene Punkte $p_1,\ldots,p_r$, so daß die abgeschlossenen $\pi/2$-Umgebungen der p_i eine Überdeckung von S^n bilden; $p_i \in M$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) : Ist $o \notin con(M)$, so kann man eine affine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ finden, die von den beiden konvexen Mengen o und con(M) positiven Abstand hat und diese trennt. Das aber widerspricht der Zerstreutheit der Menge $M \subset S^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Die konvexe Hülle von M ist die Vereinigung aller n+1-Simpizes mit Eckpunkten in M. Also liegt o auf einer r-1-dimensionalen Seite eines n+1-Simplex σ. Die Eckpunkte $p_1,..,p_r$ dieser Seite liegen auf S^n zerstreut.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Wenn $p \notin \bigcup_{i=1}^{r} U(p_i;\pi/2)$ ist, liegen $p_1,..p_r$ in $U(-p;\pi/2)$. Das widerspricht der Zerstr..

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Gäbe es $p \in S^n$, so daß $M \subset U(p;\pi/2)$, wäre der Abstand von -p zu jedem Punkt aus M größer als $\pi/2$, was im Widerspruch zu $S^n = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{U(p_i;\pi/2)}$ steht. Ω

(I.1.3) Lemma : Sei $p \in S^n$ und $M \subset U(p;\pi/2)$, also gesammelt. Dann gibt es genau einen Punkt $p_M \in U(p;\pi/2)$ und eine reelle Zahl r_M, $o \leq r_M < \pi/2$, so daß $M \subset U(p_M;r_M)$ und die Punkte aus $M \cap \partial(U(p_M;r_M))$ auf $\partial(U(p_M;r_M))$ zerstreut liegen. (p_M heißt Mittelpunkt der Umsphäre von M mit Radius r_m.)

Beweis : Definiere $D(\bar{p}) = \max\{d(x,\bar{p}) \mid x \in M\}$, $\bar{p} \in \overline{U(p;\pi/2)}$, $r_M = \min\{D(\bar{p}) \mid \bar{p} \in \overline{U(p;\pi/2)}\}$. r_M ist Minimum

eines stetigen Funktionals auf einer kompakten Menge, das in p_M angenommen wird. Wenn es einen von p_M verschiedenen Punkt q_M gäbe, wo ebenfalls das Minimum angenommen würde, existierte auf der Geodätischen von p_M nach q_M ein Punkt, dessen maximaler Abstand zu einem Punkt aus M kleiner als r_M wäre. p_M ist also eindeutig bestimmt. Außerdem muß der Schnitt $M \cap \partial(U(p_M; r_M))$ zerstreut auf $\partial(U(p_M; r_M))$ liegen, da sich andernfalls eine kleinere Umsphäre konstruieren ließe. Ω

§ 2 Eine surj. Abb. mit Dehnung kleiner zwei hat Grad ±1.

(I.2.1) Satz : Sei $f: S^m \to S^n$, $m \geq n$, eine stetige Abbildung mit Dehnung kleiner als zwei. Dann ist f genau dann surjektiv, wenn m=n und $|\deg(f)|$ gleich 1 oder -1 ist.

Beweis : Unter den Voraussetzungen läßt sich ein Homotopieinverses zu f konstruieren.

" ← " : Wenn der Grad von f 1 oder -1 ist, muß f auch surjektiv sein.

" → " : Wir nehmen an, daß $\bar{\delta}(f) = 2-a, a>0$ ist. Wähle eine Triangulierung von S^n, deren Ecken $p_0, \ldots, p_l$ seien und die so fein ist, daß der Abschluß eines Simplexsternes einer Ecke p_j in $U(p_j; a\pi/3)$ liegt. Sei σ ein Simplex mit den Ecken $p_0, \ldots, p_n$ im Abschluß des Sternes um p_j. Dann gilt $f^{-1}(\sigma) \subset U(-q; (3-2a)/(6-3a)\pi)$, $q \in f^{-1}(-p_j)$, denn für ein $z \in f^{-1}(\sigma)$ muß der Abstand zu q größer als $(\pi - \pi\frac{a}{3})/(2-a) = \pi(\frac{3-a}{6-3a}) > \pi/2$ sein. Es

ist daher $f^{-1}(\sigma)$ in S^m gesammelt. Insbesondere liegen die Mittelpunkte q_i der Umsphären der $f^{-1}(p_i)$, i=o,..,n, alle in derselben offenen Hemisphäre. Daher läßt sich die Abbildung, die jeder Ecke p_j der Triangulierung von S^n den Mittelpunkt q_j der Umsphäre von $f^{-1}(p_j)$ zuordnet, zu einer Abb. $g:S^n \to S^m$ fortsetzen durch lineare Ausdehnung. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Abb. g $g \circ f \simeq id_{S^m}$ erfüllt. Sei $x \in S^m$. obda sei f(x) in σ enthalten, σ wie oben. Dann liegt ja x in $U(-q;\pi/2)$, q wie oben. Aber auch das Bild unter g von σ liegt in dieser offenen Hemisphäre. Da der Abstand von x und $g \circ f(x)$ kleiner als π ist, gilt $g \circ f \simeq id_{S^m}$. Ω

Wir gehen auf (0.1.1) und (0.1.2) ein. Im Falle unterschiedlicher Dimension sind die beiden Probleme für Dehnung kleiner zwei trivial. Für stet. Abb. der S^n auf sich mit Dehnung kleiner zwei, gibt es zwei Klassen, die solche Repräsentanten besitzen. Die minimalen Abb. der einen KLasse bilden die SO(n+1), die der anderen O(n+1)-SO(n+1). id und Spiegelung S an den ersten n Koordinaten sind diffb. Abb. mit Dehnung 1. Auch (0.1.3) ist einfach. Da das Einhängen orthogonaler Abbildungen wieder orthogonale Abb. liefert, ist der Limes 1 und die Folge der Einhängungen stabil.

HSU hat in (1o) versucht, für S^2-Abbildungen das Resultat unseres Satzes 1 zu beweisen. Daher werden wir in (V.1) eine sehr elementare Methode vorstellen, die für S^2-Abb. stärkere Ergebnisse liefert als die von Satz 1.

II. ABBILDUNGEN MIT DEHNUNG GLEICH ZWEI

In diesem Kapitel untersuchen wir Sphärenabbildungen mit Dehnung zwei. Nichtsuspensionen können nur dann Dehnung zwei haben, wenn sie durch Hopfkonstruktion aus einer normierten bilinearen Abbildung $S^n \times S^n \to S^n$ entstehen. Daher folgt sofort $n \in \{1,3,7\}$. Um die Dehnung einer Hopfkonstruktion gut nach oben abschätzen zu können, behandeln wir diese Konstruktion in § o recht ausführlich. Dabei werden die wesentlichen Hilfsmittel für (V.2) mitentwickelt. (O.1.2) legt nun nahe, die Menge der Nichtsuspensionen mit Dehnung zwei zu untersuchen. Dabei bereiten lediglich die Faserungen $S^{15} \to S^8$ Schwierigkeiten. In § 3 untersuchen wir generell die Sphärenabbildungen, die durch Hopfkonstruktion aus einer normierten bilinearen Abbildung gewonnen werden. Klassen, die solche Repräsentanten besitzen, liegen im Bild des J-Homomorphismus. § 4 fällt ganz aus dem Rahmen der bisherigen Betrachtung, da die Dehnungsmenge untersucht wird. Wir haben bisher keinen Zugang für eine systematische Behandlung der Dehnungsmenge finden können. Daß die Dehnungsmenge i.a. keine 1-dimensionale Untermfg. sein darf, wenn die Abbildung minimal ist, wird man sofort erwarten. Aber schon im Fall von Dehnung zwei haben wir keinen offensichtlichen Beweis gefunden.

§ o Hopfkonstruktion und Dehnung

Gegeben sei eine Aufspaltung von $\mathbb{R}^{m+n+2}$ in orthogonale Unterräume $\mathbb{R}^{m+1}_1$ und $\mathbb{R}^{n+1}_2$. Wenn keine andere Aufspaltung erwähnt ist, nehmen wir an, daß $\mathbb{R}^{m+1}_1$ durch die ersten m+1, $\mathbb{R}^{n+1}_2$ durch die letzten n+1 Koordinaten definiert ist. S^m_1 sei die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{m+1}_1$, S^n_2

die in $\mathbb{R}^{n+1}_2$. Wir denken uns S^{m+n+1} aus $[o,\pi/2]\times S^m_1 \times S^n_2$ durch Identifizieren von $\{o\}\times S^m_1\times S^n_2$ zu S^m_1 und von $\{\pi/2\}\times S^m_1\times S^n_2$ zu S^n_2 mit Hilfe der Quotientenabbildung $Q(S^m_1,S^n_2)\colon [o,\pi/2]\times S^m_1\times S^n_2 \to S^{m+n+1}$; $(t,p,q) \mapsto \cos(t)p + \sin(t)q$ entstanden. Wir geben oft eine Abb. auf S^{m+n+1} durch die 3 Parameter (t,p,q) an, wobei wir beachten, daß die Abbildungsvorschrift mit der Quotientenbildung vertr. ist.

Sei $B\colon S^m\times S^n \to S^k$ eine C^1-Abbildung. Wähle einen Punkt $u\in S^{k+1}$. Wenn nicht u besonders erwähnt ist, nehmen wir $u=e_{k+2}$ an. Identifiziere S^m mit S^m_1, S^n mit S^n_2, S^k mit $S^k(u)$ isometrisch und fasse B als Abb. $S^m_1\times S^n_2 \to S^k(u)$ auf.

$C^1(o,o;\pi/2,\pi) := \{g \mid g\colon [o,\pi/2] \to [o,\pi]$, $g(o)=o$, $g(\pi/2)=\pi$ und g ist auf $(o,\pi/2)$ einmal ste-tig differenzierbar.$\}$ Sei h aus dieser Menge. Wenn nicht anders festgelegt, nehmen wir für h die Abb. $t \to 2t$.

Die Hopfkonstruktion $J(S^m_1,S^n_2,u,B,h)$ der Abb. B mit Hilfe der Aufspaltung $\mathbb{R}^{m+1}_1$, $\mathbb{R}^{n+1}_2$, des Punktes u, der Abbildung h ist:

S^{m+n+1}	$\to$	S^{k+1}
(t,p,q)	$\mapsto$	$(h(t),B(p,q))$
$\cos(t)p+\sin(t)q$	$\mapsto$	$\cos(h(t))u+\sin(h(t))B(p,q)$

Je nachdem welche Größen nicht näher spezifiziert werden, schreiben wir nur J(u,B,h), J(B,h) oder J(B). $J(S^m_1,S^n_2,u,B,h)$ ist auf $S^{m+n+1}-(S^m_1\cup S^n_2)$ C^1, und es genügt, die Dehnung dort auszurechnen. Sei $x=(t,p,q)\in S^{m+n+1}-(S^n_2\cup S^m_1)$. Wir führen die Abkürzungen ein:

$a := \delta(B|S_1^m \times \{q\}; p)$, $b := \delta(B|\{p\} \times S_2^n; q)$

$\bar{a} := a \cdot \sin(h(t))/\cos(t)$, $\bar{b} := b \cdot \sin(h(t))/\sin(t)$

$D := \sin(\arctan(\bar{a}/\bar{b})) \cdot \bar{a} + \cos(\arctan(\bar{a}/\bar{b})) \cdot \bar{b}$

(II.o.1) Behauptung : $\bar{\delta}(J(S_1^m, S_2^n, u, B, h), x) \leq \max\{h(t), D\}$ und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $h'(t) \geq D$ oder Einheitstangentialvektoren $v_a \in ST_p S_1^m$ und $v_b \in ST_q S_2^n$ existieren, so daß $\delta(B, (p, q), v_a) = a$, $\delta(B, (p, q), v_b) = b$ ist und die Bilder von v_a und v_b unter B_* linear abhängig sind.

Dabei bezeichnet für eine riem. Mfg. M STM das Bündel der Tangentialvektoren der Länge 1. $ST_x M$ ist eine Faser des Bündels. (II.o.1 wurde schon in (9;S.51) bewiesen. Wir formen nun D um:

$\bar{a}/\bar{b} = \tan(t) \cdot \frac{a}{b}$. Daher ist $\sin(\arctan(\tan(t)\frac{a}{b})) =$

$$\frac{a \cdot \sin(t)}{b \cdot \cos(t) \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 \cdot \sin^2(t)}{b^2 \cdot \cos^2(t)}}} = \frac{a}{\cos(t) \cdot \sqrt{\frac{b^2}{\sin^2(t)} + \frac{a^2}{\cos^2(t)}}}$$

Analog erhalten wir für $\cos(\arctan(\tan(t)\frac{a}{b})) =$

$$1/\sqrt{1 + \frac{a^2 \cdot \sin^2(t)}{b^2 \cdot \cos^2(t)}} = \frac{b}{\sin(t) \cdot \sqrt{\frac{b^2}{\sin^2(t)} + \frac{a^2}{\cos^2(t)}}}$$

Dur ch Einsetzen dieser Terme und von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ erhalten wir:

$D = \sin(h(t)) \sqrt{a^2/\cos^2(t)+b^2/\sin^2(t)}$

Nachdem D so vereinfacht worden ist, betrachten wir folgendes Funktional: a und b seien reelle Zahlen größer gleich 1

$$\tilde{D}: C^1(o,o;\pi/2,\pi) \to \mathbb{R}^+;\ h \mapsto \max\{h'(t), \sin(h(t)) \cdot \sqrt{a^2/\cos^2(t)+b^2/\sin^2(t)} \mid t \in (o,\pi/2)\}$$

Die drei folgenden Lemmata behandeln die Frage, ob es eine Funktion h gibt, so daß $\tilde{D}(h)$ minimaler Wert von $\tilde{D}$ ist.

(II.o.2) Lemma : $1 \leq a,b$. Für $t \in (o,\pi/2)$ ist $a+b$ kleiner gleich $\sqrt{a^2/\cos^2(t)+b^2/\sin^2(t)}$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $t=T$ ist, wobei $\cos^2(T)=a/a+b$ gilt.

Beweis : Das Lemma ergibt sich durch zweimaliges Differenzieren der Hilfsfunktion $F: (o,\pi/2) \to \mathbb{R}^+;\ t \mapsto a^2/\cos^2(t)+b^2/\sin^2(t)$. Ω

(II.o.3) Lemma : a,b,T wie oben. Sei $C: (o,\pi/2) \to (o,1]$ die Abbildung $t \mapsto (a+b)/\sqrt{a^2/\cos^2(t)+b^2/\sin^2(t)}$.

$$h(t) \mapsto \begin{cases} \arcsin(C(t)) & \text{für } t \in (o,T] \\ \arccos(C(t))+\pi/2 & \text{für } t \in [T,\pi/2) \end{cases}$$

und $h(o)=o$ und $h(\pi/2)=\pi$. Dann gilt:
h ist ein Element aus $C^1(o,o;\pi/2,\pi)$
und $\tilde{D}(h)=a+b$ ist minimaler Wert für $\tilde{D}$.

Beweis : h ist wohldefiniert und stetig, denn $C(T)=1$,

$h(T)=\arcsin(1)=\arccos(1)+\pi/2=o+\pi/2$, $\lim_{t\to o} C(t)=o$, $\lim_{t\to o} \arcsin(C(t))=o$, $\lim_{t\to \pi/2} C(t)=o$ und $\lim_{t\to \pi/2} \arccos(C(t))+\pi/2=\pi$. Auf $(o,T)\cup(T,\pi/2)$ ist h differenzierbar. Wir zeigen, daß der Limes der Ableitungen für t gegen T sowohl von links als auch von rechts 2 und, falls $a+b>2$, imme $h'(t) < a+b$ ist. Der Beweis erfolgt durch explizite Rechnung. F sei die Funktion aus dem Beweis von (II.o.2). Sei $t \in (o,T)$ fest gewählt, $\cos^2(t)=:z$ und $\sin^2(t)=1-z$, $F=F(t)$, $F'=F'(t)$.

$$F' = -2\cdot(b^2\cdot\cos^4(t)-a^2\cdot\sin^4(t))/(\cos^3(t)\cdot\sin^3(t))$$

$$1/F = (\cos^2(t)\cdot\sin^2(t))/(a^2\cdot\sin^2(t)+b^2\cdot\cos^2(t))$$

$$h'(t)=\frac{C'(t)}{\cos(h(t))} = (a+b)\cdot\frac{-F'}{2\cdot F\cdot\sqrt{F}\cdot\sqrt{1-\frac{(a+b)}{F}}}2\neg = \frac{(a+b)\cdot F'}{2\cdot F\cdot\sqrt{F-(a+b)}}2\neg$$

$$1/\sqrt{F-(a+b)}2\neg = (\cos(t)\cdot\sin(t))/\sqrt{a^2\cdot\sin^2(t)+b^2\cdot\cos^2(t)-(a+b)^2\cdot\sin^2t\cos^2t}$$

Setzt man diese Terme ein, ergibt sich für $h'(t)$ der Ausdruck:

$$\frac{-2\cdot(a+b)\cdot(b^2\cdot z^2-a^2\cdot(1-z)^2)}{-2\cdot(b^2\cdot z+a^2\cdot(1-z))\cdot\sqrt{a^2\cdot(1-z)+b^2\cdot z-(a+b)^2\cdot z\cdot(1-z)}}2$$

Die Wurzel des Nenners läßt sich erheblich vereinfachen. Sie ist

$$(a+b)^2\cdot z^2 - (a+b)^2\cdot z + (a+b)\cdot(b-a)\cdot z + a^2 = ((a+b)\cdot z - a)^2$$

Der Zähler vereinfacht sich zu: $((a+b)\cdot z-a)\cdot((b-a)\cdot z+a)$. Wir erhalten

$$h'(t) = (a+b)\cdot\frac{((b-a)\cdot z+a)}{(b^2-a^2)\cdot z+a^2}2 \text{ , wobei } (b-a)\cdot z+a \text{ und } (b^2-a^2)\cdot z+a^2 \text{ positiv}$$

sind. Wir müssen noch zeigen, daß der Quotient der Terme ≤ 1 ist.

$(b^2-a^2)\cdot z+a^2 \geq (b-a)\cdot z+a$ genau dann, wenn $a^2-a \geq (b-a)\cdot z\cdot(1-(a+b))$ ist. Falls $b \geq a$ ist, gilt die letzte Ungleichung und die Gleichheit nur für $a=b=1$. Falls $a > b$ ist, machen wir z so groß wie möglich: $z=1$. $(b-a)\cdot z\cdot(1-(a+b)) < b-a-b^2+a^2$. Auch in diesem Fall gilt die zu beweisende Ungleichung. Falls $b=1$ ist, gilt $\lim_{t\to o} h'(t) = a+b$.

Sei nun $t \in (T,\pi/2)$. Die Rechnung für diesen Fall ist analog :

$$h'(t) = C'(t)/(-\sin(\arccos(C(t)))= \frac{(a+b)\cdot F'}{2F\cdot\sqrt{F}\cdot\sqrt{1-\frac{(a+b)}{F}}^{2-}}$$

Setze nun $\sin^2(t)=z$ und $\cos^2(t)=1-z$. Dann ist $h'(t) =$

$$-(a+b)\cdot\frac{(b^2\cdot(1-z)-a^2\cdot z^2)}{(b^2\cdot(1-z)+a^2\cdot z)\sqrt{a^2\cdot z+b^2\cdot(1-z)-(a+b)^2\cdot z\cdot(1-z)}}$$

$$= -(a+b)\cdot\frac{(b\cdot(1-z)-az)\cdot(b\cdot(1-z)+az)}{(b^2+(a^2-b^2)\cdot z)((a+b)\cdot z-b)} = (a+b)\cdot\frac{(a-b)\cdot z+b}{(a^2-b^2)\cdot z+b^2}$$

Die Rollen von a und b sind nun vertauscht. Daher ist $h'(t)$ immer kleiner gleich $a+b$. Die Gleichheit gilt nur dann, wenn $a=b=1$ ist. Wenn $a=1$ ist, gilt $\lim_{t\to\pi/2} h'(t)=a+b$.

Wir müssen noch die Stelle T untersuchen: $\lim_{t\to T} h'(t)$ für $t\in(o,T)$ ist

$$(a+b)\frac{(b-a)a+a(a+b)}{a+b}\cdot\frac{1}{(b-a)a+a}^{2-} = 2;\quad (a+b)\cdot\frac{(a-b)b+b(a+b)}{a+b}\cdot\frac{1}{(a-b)b+b}^{2-} = 2$$

ist der $\lim_{t\to T} h'(t)$ für $t\in(T,\pi/2)$.

Da es für jedes $f\in C^1(o,o;\pi/2,\pi)$ ein $t_f\in(o,\pi/2)$ gibt mit $f(t_f)=\pi/2$, gilt $\vec{D}(f)\geq a+b$ nach (II.o.2). Wir haben $h'(t)\leq a+b$ bewiesen. $\sin(h(t))=C(t)$. Es ist daher $D(h)=a+b$.

Man sieht ferner wegen $h'(T)=2$, daß man, falls $a+b>2$ ist, eine Fkt. $\tilde{h}$ aus $C^1(o,o;\pi/2,\pi)$ finden kann, die kleine Umgebungen von o resp. $\pi/2$

konstant abbildet, $h'(t)<a+b$ für alle $t\in(o,\pi/2)$ erfüllt, so daß $\sin(h(t)) \leq C(t)$ und die Gleichheit nur für $t=T$ gilt. Ω

Damit ist auch das folgende Lemma bewiesen:

(II.o.4) Lemma : Ist $a=b=1$, ist die Standardabb. $t \to 2t$ eindeutig bestimmtes Minimum von $\widetilde{D}$. Ist $a+b > 2$, gibt es viele Fkt. auf denen $\widetilde{D}$ den minimale Wert $a+b$ annimmt. Insbesondere läßt sich aus diesen eine auswählen (z.B. $\widetilde{h}$), so daß $J(B,$ differenzierbar ist.

(II.o.5) Satz : Sei $B:S^m \times S^n \to S^k$ eine differenzierbare Abb. mit $\max\{\delta(B|S^m\times\{q\}|q \in S^n\}=a$ und $\max\{\delta(B|\{p\}\times S^n|p \in S^m\}=b$. a und b größer gleich 1. Dann gibt es eine Abb. h aus $C^1(o,o;\pi/2,\pi)$, so daß $J(B,h)$ Dehnung kleiner gleich $a+b$ hat.

Beweis : Dieser Satz fasst die Ergebnisse der Lemmata (II.o.2)-(II.o.4) zusammen. Ω

Wir wollen noch ein Lemma formulieren, das wir an mehreren Stelle benötigen.

(II.o.6) Lemma : L sei eine lineare Abb. des Hilbertraumes $(E_1,< , >_1)$ in den Hilbertraum $(E_2,< , >_2)$. v_1 und v_2 seien zwei Einheitsvektoren, die orthogonal sind und $L(v_1)\neq o \neq L(v_2)$. Ist

dann $\langle L(v_1), L(v_2)\rangle_2 > 0$, so ist $|L| > \max\{ |L(v_1)|_2 , |L(v_2)|_2 \}$.

Beweis : Man setzt $a := |L(v_1)|_2^2$, $b := |L(v_2)|_2^2$, $c := \langle L(v_1), L(v_2)\rangle_2$ und untersucht die Hilfsfunktion $G: [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^+$; $t \mapsto a\sin^2(t)+\cos^2(t)b+2\sin(t)\cos(t)c$. Q

§ 1 Nichtsuspensionen mit Dehnung zwei sind Faserungen

Für $r+1$ Punkte $q_1,\ldots,q_{r+1}$ aus $\mathbb{R}^{m+1}$ bezeichnet $\langle q_1,\ldots,q_{r+1}\rangle$ das lineare Erzeugnis dieser Vektoren und $\langle q_1,\ldots,q_{r+1}\rangle^{\perp}$ das zu diesem Unterraum gehörige orthogonale Komplement. Für eine stetige Abb. $f: S^{2n-1} \to S^n$ ist $\gamma(f)$ die Hopfinvariante.

(II.1.1) Satz : Sei $\alpha \in \pi_m(S^n)$, $\alpha \notin \mathrm{im}(\Sigma)$. Dann ist $\delta\langle\alpha\rangle \geq 2$ und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $m=2n-1$, $n \in \{2,4,8\}$ und $|\gamma(\alpha)|=1$ ist.

Beweis : Weil α nicht im Bild des Suspensionshomomorphismus liegt und Dehnung zwei vorausgesetzt werden kann, folgt, daß die Urbilder von Antipoden einmal verschlungene Großsphären sind. Daraus ergibt sich explizit die Gestalt einer minimalen Abbildung aus α . Aus (I.2.1) folgt schon $\delta\langle\alpha\rangle \geq 2$. Es ist daher nur noch die Aussage über die Gleichheit zu beweisen.

" $\Leftarrow$ " : Wenn α Hopfinv. ± 1 hat, enthält α eine Hopf-

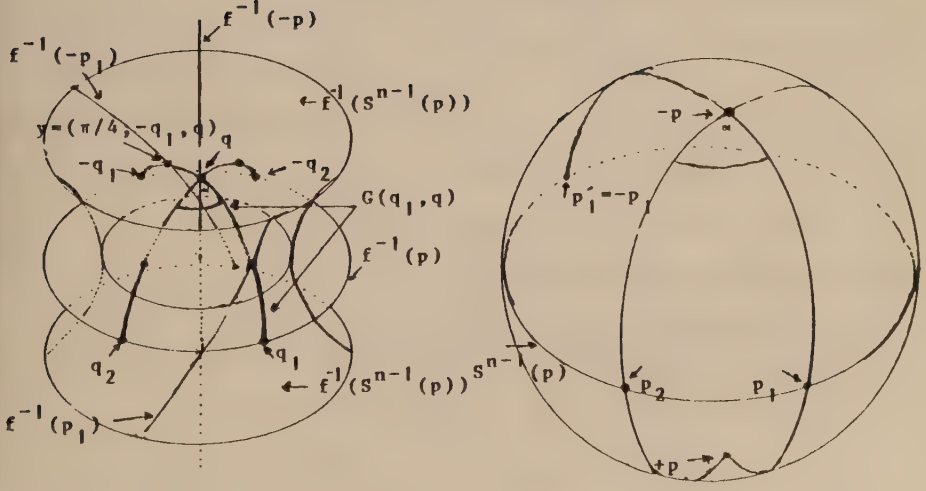
faserung, die Dehnung zwei hat, da man sie durch Hopfkonstruktion aus einer normierten bilinearen Abbildung erhält. (II.2.4)

" → " : Nach der Bemerkung im Anschluß an (0.1.2) können wir $f \in \alpha$ mit $\bar{\delta}(f)=2$ annehmen. $\pm p$ sei ein Antipodenpaar aus S^n. Gäbe es nun ein $q \in f^{-1}(p)$, dessen Antipode $-q$ nicht in $f^{-1}(p)$ läge, könnte man wegen Dehnung zwei jeden Punkt aus $f^{-1}(p)$ mit q im Komplement von $f^{-1}(-p)$ geodätisch verbinden, was die Zusammenziehbarkeit von $f^{-1}(p)$ im Komplement von $f^{-1}(-p)$ und damit einen Widerspruch zu $\alpha \notin \mathrm{im}(\Sigma)$ implizierte. Wir können also annehmen, daß für alle $q \in S^m$ $f(q) = f(-q)$ ist.

$r+1$ sei die maximale Anzahl linear unabhängiger Punkte $q_1,\ldots,q_{r+1}$ in $f^{-1}(p)$. Dann ist $f^{-1}(-p)$ in dem Schnitt $S^m \cap \langle q_1,..,q_{r+1}\rangle^{\perp}$ enthalten, der eine Großsphäre der Dimension $m+1-r-1-1=m-r-1$ ist. Da $f^{-1}(p)$ mit dieser Sphäre keinen Punkt gemeinsam hat, muß $f^{-1}(-p)$ gleich dieser Sphäre sein, da sonst $f^{-1}(-p)$ in dieser Sphäre zusammengezogen werden könnte. Analog folgt, daß $f^{-1}(p)=S^m \cap \langle q_1,..,q_{r+1}\rangle$ sein muß. Wir dürfen also annehmen, daß es zu jedem Antipodenpaar $\pm p$ in S^n eine natürliche Zahl r_p gibt, so daß $f^{-1}(p)$ eine Großsphäre der Dimension r_p, $f^{-1}(-p)$ eine Großsphäre der Dimension $m-r_p-1$ ist. Für jeden Punkt aus $f^{-1}(S^{n-1}(p))$ ist der Abstand sowohl zu $f^{-1}(p)$ als auch zu $f^{-1}(-p)$ immer $\pi/4$.

Sei oBdA $r_p \geq m-r_p-1$. Es ist wegen $m-1 \geq 2n-2$ sicher $r_p \geq n-1$. Wir zeigen nun, daß $r_p \leq n-1$ ist. Damit ist sofort bewiesen, daß alle Fasern Großsphären der Dimension $n-1$ sind. Wähle $\pm q \in f^{-1}(-p)$ und $q_1,q_2 \in f^{-1}(p)$, $q_1 \neq q_2$. Wegen Dehnung zwei gibt es einen Punkt $p_1 \in S^{n-1}(p)$ und einen Punkt $p_1' \in S^{n-1}(p)$, so daß $f(G(q_1,q))=G(p,p_1)$ und $f(G(q,-q_1))=G(-p,p;p_1')$ ist. Wir fassen S^m als Join $f^{-1}(p)*f^{-1}(-$

nd beschreiben einen Punkt aus S^m wieder als Tripel (s.S.11). Dann st $f((\pi/4,q_1,q))=p_1$ und $f((\pi/4,-q_1,q))=p_1'$. q ist ein Element von $^{-1}(S^{n-1}(-p_1))$, hat also nach der letzten Bemerkung im vorletzten bsatz von S.18 den Abstand $\pi/4$ zu $f^{-1}(-p_1)$. Sei $y\in f^{-1}(-p_1)$, so daß (q,y)= $\pi/4$. Weil aber der Abstand von y und $(\pi/4,q_1,q)$ $\pi/2$ sein uß, kann y nur der Punkt $(\pi/4,-q_1,q)$ und $p_1'=-p_1$ sein. Damit ist beiesen, daß $G(q_1,-q_1;q)$ auf den Großkreis durch p und p_1 abgebildet ird. Die nachstehende Zeichnung erläutert diesen und den nächsten eweisschritt.



f bildet den Meridian $G(-q_2,q_2;q)$ auf den Großkreis durch p und $p_2 \in S^{n-1}(p)$ ab. Wir betrachten die 2-Sphäre, die von den Punkten q, q_1 und q_2 aufgespannt. Das Skalarprodukt von q_1 und q_2 sei $\cos(d(q$ $f((\pi/4,q_1,q))$ und $f((\pi/4,q_2,q))$ liegen beide in $S^{n-1}(p)$. Gilt nun $<f((\pi/4,q_1,q)),f((\pi/4,q_2,q))> < <q_1,q_2>$, so folgt ein Widerspruch zu Dehnung zwei: Der Abstand zwischen (t,q_1,q) und (t,q_2,q), $t \in (\pi/4,\pi/2)$ beträgt $\cos(t)\cdot\arccos(a)$. Sie werden abgebildet auf $(2t,p_1)$ resp. $(2t,p_2)$ [; der ausgezeichnete Punkt ist hier $-p=f(q)$]. Der Abstand der beiden Bildpunkte ist $\sin(2t)\cdot\arccos(<p_1,p_2>)$, die Dehnung von f größer gleich $\lim_{t\to\pi/2} 2\sin(t)\arccos(a)/\arccos(b)$, wobei $b=<p_1,p_2>$ ist. Betrachtet man $-q_1$ statt q_1, sieht man, daß $<p_1,p_2> = <q_1,q_2>$ ist. Daher ist die Abbildung $B(\ ,q): f^{-1}(p) \to S^{n-1}(p)$; $\bar{q} \to f((\pi/4,\bar{q},q))$ eine Isometrie. Es muß also $r_p \leq n-1$ sein. Damit ist $r_p = n-1$ bewiesen.

Doch der Beweis hat noch mehr gebracht: Ganz analog folgt, daß fi beliebiges $\bar{q} \in f^{-1}(+p)$ $B(\bar{q},\ ):f^{-1}(-p) \to S^{n-1}(p)$; $q \to f((\pi/4,\bar{q},q))$ ei Isometrie ist. Daher kann B zu einer bilinearen Abb. $B:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ausgedehnt werden, die die zusätzliche Eigenschaft $|B(\bar{q},q)| = |\bar{q}|\cdot|q|$ b sitzt. Es ist nach Konstruktion von B klar, daß $J(f^{-1}(p),f^{-1}(-p),p$ gleich f ist. Da es nur für $n \in \{2,4,8\}$ norm. bil. Abb. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt und deren Hopfkonstruktionen Abbildungen mit Hopfinvariante liefern, haben wir (II.1.1) vollständig bewiesen. Die Argumente, d f Hopfkonstruktion einer normierten bilinearen Abbildung ist, werd wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch benötigen. Ω

§ 2 Betrachtung der Mengen $H_2^3(2)$, $H_4^7(2)$, $H_8^{15}(2)$

Der Beweis von (II.1.1) legt nahe, normierte bilineare Abbildungen genauer zu untersuchen. Zunächst sollen einige Ergebnisse der Arbeiten (2) und (5) zitiert werden.

(II.2.1) Definition : $N_{k+1,m}(\mathbb{R}^n) := \{B \mid B: \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist eine bilineare Abb., die normiert ist, d.h., für $(x,y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^m$ gilt: $\| B(x,y) \| = \|x\| \cdot \|y\|$. $)$

$N'_{k+1,m}(\mathbb{R}^n) := \{B \mid B \in N_{k+1,m}(\mathbb{R}^n)$ mit $B(e_o, \,) = id\}$

Dabei ist $(e_o, .., e_k)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{k+1}$.

(II.2.2) Zitat aus (2): $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ wird als Teilmenge des k+1-fachen cartesischen Produktes von $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefaßt. (Man beachte m=n !) $\chi: O(n) \times N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n) \to N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n) : (\alpha, B) \to \alpha \circ B$ ist eine (stetige) freie Operation. $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)/O(n)$ ist $N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ und $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ ist ein triviales Bündel über $N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ mit Faser O(n).
Eine bilineare Abbildung $B: \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann in $N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$, wenn für $B(e_i, \,) = O_i$, $o \leq i \leq k$, die Relationen erfüllt sind:

$$O_o = id_{\mathbb{R}^n},\ O_i^2 = -id_{\mathbb{R}^n},\ O_i \circ O_j = -O_j \circ O_i,\ 1 \leq i < j \leq k.$$

B ist also eine n-dimensionale Darstellung der k-ten Cliffordalgebra C(k). Da diese

Darstellungen gut bekannt sind, erhält man $N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ als Quotient bekannter Liegruppen. $\alpha : O(n) \times N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n) \to N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$; $(\gamma, B) \to \gamma \circ B(id \times \gamma^{-1})$ ist eine Operation auf dem Raum aller n-dimens. Darst. von C(k). Die Standgruppen sind alle isotrop; es sind die k-ten Cliffordgruppen $G^k(m)$ (s.unten). Die Anzahl der Orbiten ist die Anzahl der nicht-äquivalenten Darstellungen.

Sei $k+1 = 8r+s+1$; σ gibt an, ob k+1 gerade ist; a_{k+1} ist die Dimension der irreduziblen Darstellung(en) von C(k); n muß o sein modulo a_{k+1}, sonst ist $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$; $m = n/a_{k+1}$; α_1 ist die Anzahl der irred. Darstellungen von C(k); α_2 ist die Anzahl der nicht-äquivalenten n-dimensionalen Darst.; $G^k(m)$ ist die Standgruppe der Operation α. Die explizite Angabe der Einbettung von $G^k(m)$ in O(n) findet man in (2 ;S.42), die Berechnung von a_{k+1} in (5 ;S.365). Es ergibt sich folgende Tabelle:

s	σ	a_{k+1}	α_1	n	α_2	$G^k(m) \to O(n)$
o	-	$2^{4r} = 16^r$	1	$m16^r$	1	$O(m) \to O(n)$
1	+	$2^{4r+1} = 16^r 2$	1	$m16^r 2$	1	$U(m) \to O(n)$
2	-	$2^{4r+2} = 16^r 4$	1	$m16^r 4$	1	$Sp(m) \to O(n)$
3	+	$2^{4r+2} = 16^r 4$	2	$m16^r 4$	m+1	$Sp(m) \to O(n)$
4	-	$2^{4r+3} = 16^r 8$	1	$m16^r 8$	1	$Sp(m) \to O(n)$
5	+	$2^{4r+3} = 16^r 8$	1	$m16^r 8$	1	$U(m) \to O(n)$
6	-	$2^{4r+3} = 16^r 8$	1	$m16^r 8$	1	$O(m) \to O(n)$
7	+	$2^{4r+3} = 16^r 8$	2	$m16^r 8$	m+1	$O(m) \to O(n)$

Bevor wir ein Korollar zu Satz (II.1.1) formulieren, geben wir die Definition der Dehnungsmenge einer differenzierbaren Abbildung zwischen riem. Mannigfaltigkeiten M und N:

(II.2.3) Definition : Sei $f:M \to N$ eine differenzierbare Abb. der riem. Mfg. M in die riem. Mfg. N. Es ist $\Delta(f) := \{x \in M \mid \delta(f,x) = \delta(f)\}$ die Dehnungsmenge von f in M. $T\Delta_x(f) := \{v \in T_xM \mid \delta(f,x,v) = \delta(f)\}$ ist die Dehnungsmenge von f im Tangentialraum von $x \in M$. (Auch für stetige Abb. läßt sich die Dehnungsmenge $\bar{\Delta}(f)$ ganz analog definieren.)

(II.2.4) Lemma : Sei $f:S^{m+n+1} \to S^{k+1}$ eine differenzierbare Abbildung mit Dehnung zwei. Es gebe einen Punkt $p \in S^{k+1}$, so daß $f^{-1}(p)$ eine Groß-S^m, $f^{-1}(-p)$ eine S^n ist. Dann gibt es eine normierte bilineare Abb. $B:S^m \times S^n \to S^k$, so daß $f = J(f^{-1}(p), f^{-1}(-p), p, B)$ reellanalytisch ist.

Wenn $B:\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine norm. bil. Abb. ist, so liefert die Einschränkung der Abbildung $\mathcal{J}(B):\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k+1}$; $(x,y) \to (2B(x,y), \|x\|^2 - \|y\|^2)$ auf S^{m+n-1} die Abb. $J(S^{m-1}, S^{n-1}, e_{k+1}, B, t \to 2t)$, die Dehnung zwei besitzt.

Beweis : $f^{-1}(-p)$ muß die mit $S^m = f^{-1}(p)$ verschlungene Groß-S^n sein. Nun folgt aber, daß für $q \in f^{-1}(-p)$ und $q_1, q_2 \in f^{-1}(p)$ $d(q_1,q_2) = d(f((\pi/4, q_1, q)), f((\pi/4, q_2, q))$ sein muß,

weil die Einheitstangentialvektoren, die durch $G(q_1,q)$ und $G(q_2,q)$ in q induziert werden, in $T\Delta_q(f)$ liegen und f_* nach (II.o.6) auf dem Erzeugnis von Tangentialvektoren, die in der Dehnungsmenge liegen, winkeltreu sein muß. Das aber war der entscheidende Schritt in (II.1.1), um die Existenz einer normierten bil. Abb.B zu zeigen, deren Hopfkonstruktion f ist. Die Differenzierbarkeitsaussage ergibt sich unmittelbar aus dem zweiten Teil.
$\tilde{J}(B)$ bildet S^{m+n-1} auf S^k ab. $\tilde{J}(B)^{-1}(e_{k+1})=S^{m-1}_1$, $\tilde{J}(B)^{-1}(-e_{k+1})=S^{n-1}_2$.
Sei $z\in S^{m+n-1}-(S^{m-1}_1 \cup S^{n-1}_2)$ gegeben: $z=(t,q,p)=\cos(t)q+\sin(t)p$. Dann ist $\tilde{J}(B)(z)=2\cos(t)\sin(t)B(q,p)+(\cos^2(t)-\sin^2(t))e_{k+1}=\cos(2t)B(q,p)$ $\sin(2t)e_{k+1}=(2t,B(q,p))=J(B)(z)$. Da für B norm. und bil. die Zahlen a und b aus (II.o.5) beide gleich 1 sind, gilt: J(B)hat Dehnung 2.Ω

In (1o;S.6) werden von HSU die Mengen $H^m_n(s)$ eingeführt.

(II.2.5) Definition : $H^m_n(s):=\{f \mid f:S^m \to S^n$ eine differenzierbare Abb., für die es ein n-dimensionales Unterbündel (E_f,π,S^m) von (TS^m,π,S^m) gibt, so daß für alle v aus E_f $\|f_*(v)\| = s\cdot\|v\|$.)

Sie bewies $H^m_n(s)=\emptyset$ außer in folgenden Fällen: a) $H^n_n(1)=O(n+1)$, b) $s\in\mathbb{N}$ $H^1_1(s)=O(2)$ (vergleiche dazu die Bemerkungen im Anschluß an (O.1.2) und (I.2.1).) und c) $m=2n-1$, $n\in\{2,4,8\}$ und $s=2$. Die letzten drei Mengen können wir auch folgendermaßen beschreiben : $H^{2n-1}_n(2)=\{f \mid \bar{\delta}(f)=2$ und $\gamma<f>\neq o\}$. Das folgt unmittelbar aus (II.1. HSU hat $H^3_2(2)$ gut charakterisiert, aber mit ziemlich großem Aufwand Da wir eine explizite Beschreibung der Elemente von $H^{2n-1}_n(2)$ kenner

gelingt uns die Charakterisierung wesentlich einfacher. Wir machen noch folgende Definition, die durch (II.1.1) und (II.2.4) motiviert ist.

(II.2.6) Definition : $\bar{H}^{k+m}_n(2) := \{f \mid f: S^{k+m} \to S^n$ sei differenzierbar mit $\delta(f)=2$; es gebe einen Punkt p aus S^n, so daß $f^{-1}(p)$ eine Groß-S^k, $f^{-1}(-p)$ eine Groß-S^{m-1} ist.$\}$

Diese Mengen sind keineswegs so einfach zu beschreiben, wie die Mengen $H^m_n(s)$. Z.B. hat LAM eine normierte bil. Abb. $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{16}$ angegeben, deren Hopfkonstruktion ein nichttriviales Element in $\pi_{19}(S^{16}) = \mathbb{Z}_{24}$ definiert. Also ist $\bar{H}^{9+10}_{16}(2) \neq \emptyset$. Wir kommen noch auf dieses Beispiel in § 3 zurück.

Wir werden nun versuchen, die Mengen H^{2n-1}_n und $\bar{H}^{k+n}_n$ durch die Kenntnis der Räume $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ besser zu beschreiben. Aus (II.2.2) folgt die Klassifikation der Räume $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$:

(II.2.7) Zitat aus (2): $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n) = O(n) \times (O(n)/G^k(m)) \times \{1,\ldots,\alpha_2\}$
Dabei ist $\alpha_2 = m+1$, falls $k+1 \equiv o(4)$, und 1 sonst.

Auf H^{2n-1}_n und $\bar{H}^{k+n}_n$ operiert O(2n) resp. O(k+1+n) folgendermaßen:

$\Phi: O(k+1+n) \times \bar{H}^{k+n}_n \to \bar{H}^{k+n}_n$ und $\Phi: O(2n) \times H^{2n-1}_n \to H^{2n-1}_n$
$(C , f) \to f \circ C^{-1}$ $(C, f) \to f \circ C^{-1}$

Mit Φ hängt die folgende Operation Ψ auf $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ eng zusammen :

$\Psi: O(k+1)\times O(n)\times N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n) \to N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$; $(\alpha,\beta,B)\mapsto B(\alpha^{-1},\beta^{-1})$. Wir können für die Berechnung der Standgruppen B aus $N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$ wählen, da $B(id_{\mathbb{R}^{k+1}}\times(B(e_o,\ ))^{-1})(e_o,x)=x$ ist. Sei $\alpha^{-1}=\alpha^T$ die Matrix

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} a_{oo} & \cdots & a_{ok} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ko} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$ Welche α,β lösen $B(\alpha^T,\beta^T)=B$?

(II.2.8) Satz : Die Standgruppen für Ψ sind $SO(2)$ für $k=1$, S^3 für $k=3$ und $S^o=\{id,-id\}$ sonst.

Beweis : Wir nutzen die Einfachheit von $C(k)$ aus. Aus $B(\alpha^T,\beta^T)=B$ erhalten wir nacheinander die folgenden Gleichungen wegen der Relationen (II.2.2):

$$o_j = \Sigma_{i=o}^{k} a_{ij}o_i\beta^T \qquad , o \leq j \leq k,$$

$$\beta = \Sigma_{i=o}^{k} a_{io}o_i \qquad , 1 \leq j \leq k, \quad \beta=-(\Sigma_{i=o}^{k} a_{ij}o_jo_i)$$

$$o = \Sigma_{i=o}^{k} a_{io}o_i + \Sigma_{i=o}^{k} a_{ij}o_jo_i \ , \ 1 \leq j \leq k,$$

$$o = (a_{oo}-a_{jj})id + (a_{jo}+a_{oj})o_j + \Sigma_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} a_{io}o_i + \Sigma_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} a_{ij}o_jo_i \ , 1 \leq j \leq k.$$

Falls $C(k)$ einfach ist, also im Fall $k\neq 3(4)$, ist die Darstellung B treu. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $1,e_1,..,e_k,e_1e_2,..,e_ie_j..,e_{k-1}e_k$ müssen die einzelnen Koeffizienten null sein. Im Fall $k=1$ ist also $a_{1o}=-a_{o1}$, $a_{11}=a_{oo}$, $\det(\alpha)=a_{oo}^2+a_{o1}^2>o$ und daher $\alpha\in SO(2)=S^1$. Für $k\geq 2$, $k\neq 3(4)$, muß $\alpha=\beta=\pm id$ sein.

Für $k=3(4)$ beschränken wir die Darstellung B auf das einfache Ideal $C(k)\cdot(1-\frac{e_1\cdot\ldots\cdot e_k}{2})$. Aus den Gleichungen oben folgt für $1\leq j\leq k$:

$$\beta((\Sigma_{i=o}^{k} a_{io}\cdot e_i + \Sigma_{i=o}^{k} a_{ij}\cdot e_j e_i)\cdot(1-\frac{e_o\cdots e_k}{2}))=o$$

Das ergibt die Gleichungen:

$$o = -(a_{oo}-a_{jj})e_i\cdots e_k \pm (a_{jo}+a_{oj})\Pi_{m\neq j}^{k} e_m + \Sigma_{i\neq j}^{k} a_{io}\Pi_{m\neq i}^{k} e_m + \Sigma_{i\neq j}^{k} a_{ij}\Pi_{m\neq i,j}^{k} e_m$$

$$+ (a_{oo}-a_{jj})1 + (a_{jo}+a_{oj})e_j + \Sigma_{i\neq j}^{k} a_{io}e_i + \Sigma_{i\neq j}^{k} a_{ij}e_j\cdot e_i$$

Falls $k-2>2$ ist, folgt wieder $\alpha=\beta=\pm id$. Im Fall $k=3$ muß man diese Gleichungen explizit ausrechnen und erhält als Matrix α^T :

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} a_{oo} & -a_{1o} & -a_{2o} & -a_{3o} \\ a_{1o} & a_{oo} & a_{3o} & -a_{2o} \\ a_{2o} & -a_{3o} & a_{oo} & a_{1o} \\ a_{3o} & a_{2o} & -a_{1o} & a_{oo} \end{pmatrix}$$

Durch Vorgabe von $(a_{oo},a_{1o},a_{2o},a_{3o})\ S^3$ ist α,β eindeutig bestimmt. Damit sind die Standgruppen der Operation Ψ ausgerechnet. Ω

(II.2.9) Satz : $H_2^3(2)=O(4)/S^1$; $H_4^7(2)=O(8)/S^3\times O(1)$

$H_8^{15}(2)\approx O(16)/O(1)\times O(1)$

$H_n^{k+n}(2)\approx S^n\times O(k+1+n)/F(\Psi)\times N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)/\Psi$,

wobei $k+1<n$, $F(\Psi)$ die Standgruppe von Ψ und $N_{k+1,n}\mathbb{R}^n/\Psi$ der Raum der Orbiten von Ψ ist.

($\approx$ bedeutet, daß nur eine Bijektion angegeben wird.)

Beweis : Sei $f\in H_n^{2n-1}(2)$. Wegen der Operation Φ können wir annehmen, daß $f^{-1}(e_n)=S^{n-1}$ ist und die zu f gehörende bilineare Abb. B_f $B_f(e_o,)=id=B_f(,e_o)$ erfüllt, wenn $e_o,\ldots,e_{n-1}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Berechnet man nacheinander

die Normen von $B_f(x,y)$, wenn (x,y) die folgenden Vektoren durchläuft, so erhält man nachstehende Relationen: Sei $a=\sqrt{2}/2$.

$(x,y)\in\{(ae_o+ae_i,ae_o+ae_i),(ae_i+ae_j,ae_i+ae_j),(ae_j+ae_i,e_j),(ae_1+ae_i,e$

$(ae_1+ae_j,e_i)\}$

$B_f(e_i,e_i)=-e_o$, $B_f(e_i,e_j)=-B_f(e_j,e_i)$, $B_f(e_i,e_j)$ steht senkrecht auf e_1,e_i und e_j. Dabei ist $1<i,j<k$.

Für n=2 folgt daraus: $B_f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist die komplexe Multiplikatio

Für n=4 folgt daraus: $B_f:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ ist die Multiplikation der Quaternionen oder die vertauschte Multiplikation.

Sei nun * eine der drei genannten Multiplikationen. Es gelte für $(q,p)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ und $A,B\in O(n)$: $(Aq*Bp)=q*p$. Dann ist $Aq=q*B^{-1}$ Setze $B^{-1}e_o=z\in S^{n-1}$. $Bp=A^{-1}e_o*p=\bar{z}*p$. Also ist $(Aq*Bp)=q*z*\bar{z}*p=q*p$. Daher ist die Standgruppe von * gleich S^1 und * ist transitiv für n=2. Für n=4 haben wir 2 TransitivitÄtsgebiete und Standgruppe S^3. Das beweist die Aussage über H_2^3 und H_4^7.

Folgte aus obigen Relationen, daß B_f nur die Multiplikation der Cayleyzahlen oder deren vertauschte Multiplikation ist, wären wir fertig. So wissen wir nur, daß der Orbit dieser Multiplikationen $O(8)\times O(8)/O(1)$ist. Die Bijektion ergibt sich, weil nach der Tabell von S. 22 $N_{8,8}(\mathbb{R}^8)=O(8)\times O(8)/O(1)\times O(1)$ ist.

Ein Element aus $\bar{H}_n^{k+n}$ ist durch den Ausnahmewert aus S^n, die Lage der Ausnahmefaser in S^{k+n} und eine normierte bil. Abb. aus $N_{k+1,n}$ gegeben. Die Lage der Ausnahmefaser bestimmt ein Element aus $O(k+1+n)/O(k+1)\times O(n)$. $O(k+1)\times O(n)/Fix(\Psi)$ operiert effektiv auf $N_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)=O(n)\times N'_{k+1,n}(\mathbb{R}^n)$. Alle Elemente aus demselben Orbit unter Ψ definieren dasselbe Element aus $\bar{H}_n^{k+n}$.

Wollte man $\bar{H}_n^{k+n}$ noch genauer beschreiben müßte der Zusammenhang zwischen den Operationen α von S.22 oben und Ψ von 26 detaillierte untersucht werden. Ω

§ 3 Welche Klassen sind durch normierte bil. Abb. repräsentierbar?

(II.3.1) Zitat aus ([1]): Jedes Element aus $\pi_k(O)$ kann durch eine $\mathbb{R}$-lineare Abb. $T:\mathbb{R}^{k+1} \to M(n,n)$ mit $T(S^k) \subset O(n)$ repräsentiert werden. (Dabei ist $M(n,n)$ der Raum der $n\times n$-Matrizen.)

(II.3.2) Korollar : Sei $\alpha\in\pi_k^s$ eine stabile Homotopieklasse im Bild von J; d.h. es gibt eine Homotopieklasse $\omega\in\pi_k(O)$, so daß für einen Repräsentanten $F:S^k \to O(n)$ von ω die Hopfkonstruktion $J(B_F)$ der Abb. $B_F:S^k\times S^{n-1} \to S^{n-1}$; $(x,y)\mapsto F(x)\,(y)$ α repräsentiert. Dann besitzt α einen differenzierbaren Repräsentanten mit Dehnung 2.

Beweis : Wähle als Repräsentanten von ω die Abb. T aus (II.3.1). Dann ist B_T eine normierte bilineare Abb.. $J(B_T)$ hat nach (II.2.6) Dehnung 2 und ist reellanalytisch. (ROITBERG hat ebenfalls (II.3.2) bewiesen durch explizite Berechnung der Dehnung von $\gamma(B_T)$. Wir halten seine Rechnungen für zu aufwendig.) Ω

Nun hat LAM das interessante Beispiel einer norm. bil. Abb. von $\mathbb{R}^{10}\times\mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{16}$ angegeben, die $2\nu\in\pi_3^s$ repräsentiert, wobei ν durch die Einhängung eines Elementes aus $H_4^7(2)$ mit Hopfinv. 1 entsteht. Dieses Element $2\nu\in\pi_3^s-z_{24}$ ist ungleich null, da ν Erzeugendes ist, und liegt im Bild von J. Weil LAM die norm. bil. Abb. explizit kannte, konnte er einen regulären Wert wählen, zeigen, daß dessen Urbild eine Großsphäre war, deren Rahmung 2ν lieferte. (siehe (15))

(II.3.3) Satz : Eine stabile Homotopieklasse, die durch eine normierte bilineare Abbildung repräsentiert werden kann, liegt im Bild von J.

Beweis : Wir gehen genauso vor wie LAM: wir wählen einen regulären Wert und zeigen, daß dessen Urbild eine Großsphäre ist. Nach KERVAIRE-MILNOR (14;S.512) liegen alle Klassen, die durch stabiltriviale Rahmung einer Standardsphäre entstehen, im Bild von J. (J kommt im Beweis in zwei Bedeutungen vor, einmal als Homomorphismus von $\pi_k(O)$ nach π_k^s und einmal um die Hopfkonstruktion zu bezeichnen.)

Die Homotopieklasse α werde durch J(B) repräsentiert, $B:\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ Wenn J(B) nicht surjektiv ist, folgt $\alpha=o$. Wir nehmen also an, daß J(B) surjektiv ist. J(B) ist Einschränkung von $\tilde{J}(B)$, die die Eigenschaft $\tilde{J}(B)(-x,-y)=\tilde{J}(B)(x,y)$ besitzt. Also gilt für alle $q\in S^{k+m}$: $J(B)(q)=J(B)(-q)$. Da J(B) mehr als k+m-n-mal differenzierbar ist, können wir mit Hilfe des SARD-Theorems die Existenz eines Punktes $p\in S^n$ beweisen, so daß p und -p reguläre Werte von J(B) sind. Wir nehmen weiter an, daß $p\neq e_{n+2}$ ist. $U_p:=J(B)^{-1}(p)$ und $U_{-p}:=J(B)^{-1}(-p$

Sei $x\in U_p$, $x=(t_x,q_x,p_x)$. J(B) hat genau dann maximalen Rang in x, wenn B maximalen Rang in (q_x,p_x) hat. Also ist $B_*|_{(q_x,p_x)}$ surjekti $B:S^k\times S^{m-1}\to S^{n-1}$. $(B|_{\{q_x\}\times S^{m-1}})_*|_{(q_x,p_x)}(T_{(q_x,p_x)}(\{q_x\}\times S^{m-1}))$ ist ein m-1-dimensionaler Teilraum des Tangentialraumes $T_{B(q_x,p_x)}S$ $(B|_{S^k\times\{p_x\}})_*|_{(q_x,p_x)}(T_{(q_x,p_x)}(S^k\times\{p_x\}))$ ist ein k-dimensionaler Teilraum desselben Tangentialraumes. Wegen der Surjektivität ist der Durchschnitt der Teilräume k+m-1-n+1 dimensional. Weil die

Einschränkung von B auf $q_x \times S^{m-1}$ und $S^k \times p_x$ injektiv ist, gibt es genau einen Vektor $v_w \in T_{(q_x,p_x)} S^k \times S^{m-1}$, der von $B_* | (q_x,p_x)$ auf einen vorgegebenen Vektor w in diesem Durchschnitt der Teilräume abgebildet wird.

Daher ist die Menge der Richtungen in $T_x S^{k+m}$ senkrecht zur t-Richtung, die maximal gedehnt werden nach (II.o.1) ein k+m-n-dimensionaler Teilraum. Da die Dehnung in t-Richtung ebenfalls 2 ist, ist der Raum $T\Delta_x(J(B))$ k+m-n+1-dimensional.

Durch jeden Punkt $y \in U_{-p}$ wird durch G(y,x) ein Einheitstangentialvektor in x induziert. Sind $y_1, y_2 \in U_{-p}$ als Punkte im R^{k+1+m} linear unabhängig, so sind es auch die Einheitstangentialvektoren in $T_x S^{k+m}$. Diese Vektoren liegen aber auch in $T\Delta_x(J(B))$. Daher kann U_{-p} höchstens k+m-n+1 l.u. Punkte enthalten, woraus folgt, daß U_{-p} in einer Groß-S^{k+m-n} liegt. U_{-p} ist als Urbild eines regulären Wertes eine k+m-n-dimensionale Untermfg. von S^{k+m}, also gleich dieser Groß-S^{k+m-n}. Mit dem Satz von KERVAIRE-MILNOR, den wir oben zitierten, sind wir fertig. Ω

WOOD hat in (26;S.163) bewiesen, daß jede quadratische Form, die Sphären in Sphären abbildet, zu $J(B)$ homotop ist, wobei B eine normierte bilineare Abbildung ist. Er fragt dann, welche Homotopieklassen, die nicht im Bild von J liegen, durch eine quadratische Form (die Sphären in Sphären abbildet) repräsentiert werden können. (II.3.3) zeigt, daß es solche Klassen nicht gibt. Es ist wohlbekannt, daß für eine norm. bil. Abb. B J(B) harmonisch ist. Die Frage nach der Anzahl von harmonischen Repräsentanten einer Homotopieklasse bleibt von (II.3.3) völlig unberührt. Wir wollen noch etwas

zur Untersuchung der Menge der bilinearen Abbildungen (x) von $\mathbb{R}^{k+l} \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, die wir mit $B_{k+l,m}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen, ergänzend zu (2;S.4) bemerken. Der Satz von WOOD, daß $B_{2,2m}(\mathbb{R}^{2m}) \approx N_{2,2m}(\mathbb{R}^{2m})$ ist, muß als Ausnahme in der Beziehung von $B_{k+l,m}(\mathbb{R}^n)$ zu $N_{k+l,m}(\mathbb{R}^n)$ angesehen werden, denn i.a. wird $B_{k+l,m}(\mathbb{R}^n)$ mehr Zusammenhangskomponenten haben als $N_{k+l,m}(\mathbb{R}^n)$. So läßt sich beispielsweise η^2 nichtsingulär bil. repräsentieren, siehe (15). Aber η^2 liegt nicht im Bild von J. η^2 ist das nichtverschwindende Element von $\pi_2^s = \mathbb{Z}_2$. Es kann repräsentiert werden durch die Einhängung von $f \circ S(f)$, wobei f aus $H_2^3(2)$ mit $\gamma(f)=1$ ist. Betrachtet man für dieses Element (O.1.3), stößt man auf einige interessante Fragen:

Vermutung von OLIVIER: $\delta\langle f \circ S(f)\rangle = 4$.

Der genaue Wert für $\delta\langle S(f \circ S(f))\rangle$ ist unbekannt. Er ist ≤ 3. (V.4)

Der genaue Wert für $\delta\langle S^2(f) \circ S^3(f)\rangle$ ist unbekannt. Er ist auch ≤ 3.

Es gilt $\delta\langle S^3(f \circ S(f))\rangle = 2$. Ob aber ein differenzierbarer Repräsentant existiert, wissen wir nicht. (siehe (9;S.27))

LAM hat auch $\nu^2 \in \pi_6^s$ nichtsingulär bil. repräsentiert. ν^2 bekommt man durch Einhängung von $g \circ S^3 g$, wobei $g \in H_4^7(2)$ mit $\gamma(g)=1$ ist. ν^2 liegt ebenfalls nicht im Bild von J. $\delta\langle S^5(g \circ S^3 g)\rangle = 2$. Wieder ist ein differenzierbarer Repräsentant nicht bekannt.

Wir haben diese Beispiele angeführt, um zu zeigen, daß (O.1.1) schon für d=2 keineswegs trivial ist. I.a. enthält $\bar{\delta}^{-1}(2)$ echt das Bild von J. Um einen Hinweis zu geben, wieviel bisher in der Homotopietheorie getan worden ist, um die Ordnung des Bildes von J exakt zu bestimmen, verweisen wir auf die Arbeit von MAHOWALD.

(x): nichtsingulären

§ 4 Dehnung zwei und eindimensionale Dehnungsmenge Δ_f und $T\Delta_f$

Wenn wir $S_1^m * S_2^k$ für S^{k+1+m} schreiben, fassen wir S^{k+1+m} als die Vereinigung aller G(q,p) auf, wobei $q \in S_1^m$, $p \in S_2^k$, S_1^m und S_2^k durch die kanonische Aufspaltung definiert sind. Ist h eine Abb. von S_1^m nach S_1^n, g eine Abb. von S_2^k nach S_2^l, so können wir eine Abb. h*g von S^{m+k+1} nach S^{n+l+1} dadurch definieren, daß h*g einen Meridian G(q,p) auf den Meridian G(h(q),g(p)) abbildet. In Standardkoordinaten :

$h*g: S^{m+k+1} \to S^{n+l+1}$; $(t,q,p) \to (t,h(q),g(p))$.

(II.4.1) Lemma : Sei $f: S_1^m * S_2^k \to S_1^n * S_2^l$ eine stetige Abb. mit $f(S_1^m) = S_1^n$. Für beliebiges $(q,p) \in S_1^m * S_2^k$ sei die Länge von $f(G(q,p)) < \pi$. Dann gibt es eine stetige Abb. $g: S_2^k \to S_2^l$, so daß

$$<f> = <f|S_1^m * g> = <S^{l+1}(f|S_1^m)> \circ <S^{m+1}(g)>$$
$$= <S^{n+1}(g)> \circ <S^{k+1}(f|S_1^m)> \text{ ist.}$$

Beweis : Wegen $f(S_1^m) = S_1^n$ und der Voraussetzung über die Länge des Bildes eines Meridians folgt $f(S_2^k) \subset S^{n+1+l} - S_1^n$. $g: S_2^k \to S_2^l$ ordnet einem $p \in S_2^k$ den Fußpunkt des Lotes von f(p) auf S_2^l zu. Offensichtlich ist dann f zu $f|S_1^m * g$ homotop. $f|S_1^m * g$ bildet G(q,p) auf G(f(q),g(p)) ab. $S^{m+1}(g)$ bildet G(q,p) auf G(q,g(p)) in $S_1^m * S_2^l$ ab. $S^{l+1}(f|S_1^m)$ bildet G(q,g(p)) auf G(f(q),g(p)) ab. Das beweist die zweite Gleichung. Der Beweis der dritten Gleichung ist ganz analog. □

(II.4.2) Satz : Sei $f: S^m \to S^n$ eine differenzierbare Abbildung mit $\delta(f) = 2$. Sei N eine 1-dim. diffb. Untermannigfaltigkeit von S^n. Sei ferner

$f_*(\Delta_f) \subset N$ und $f_*(T\Delta_f) \subset TN$. Dann ist $m=n$ oder $\langle f \rangle = o$.

Sei f wie oben und M eine 1-dim., abgeschlossene, diffb. Untermannigfaltigkeit von S^m. Es sei ferner $\Delta_f \subset M$ und $T\Delta_f \subset TM$. Dann ist $m=n$ oder $\langle f \rangle = o$.

Beweis : Für $m>n+1$ folgt sofort ein Widerspruch mit einem Theorem von YANG. $n+1=3$ ist in (II.1.1) erledigt worden. Durch geeignete Anwendung des BORSUK-ULAM-Theorems folgt im Fall $m=n+1>3$ unter Berücksichtigung von $\pi_1^s = \mathbb{Z}_2$ ebenfalls ein Widerspruch.

(II.4.3) Zitat aus [7]: Sei $f: S^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es zu jeder Zahl r, $o < r \leq 2\pi/3$, drei Punkte $q_1, q_2, q_3 \in S^{n+1}$, so daß $d(q_1,q_2) = d(q_1,q_3) = d(q_2,q_3) = r$ und $f(q_1)=f(q_2)=f(q_3)$ ist.

Ist also $m>n+1$ existieren drei Punkte q_1, q_2, q_3 in S^m mit jeweiligem Abstand $2\pi/3$, die alle drei auf den Punkt $p \in S^n$ abgebildet werden. Wenn $f^{-1}(-p)$ leer ist, ist f nullhomotop. Sei $q \in f^{-1}(-p)$. Dann ist $q \in \Delta_f$. Die Tangentialvektoren, die durch die $G(q_i,q)$ in q induziert werden, liegen in $T\Delta_q(f)$. Da aber $f_*|_q$ auf $T\Delta_q(f)$ winkeltreu ist, schneiden sich die Meridiane $f(G(q_i,q))$ in S^n jeweils unter einem Winkel $2\pi/3$. Das steht natürlich im Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei $m=n+1>3$. $A := \{q \mid q \in S^{n+1}$ mit $f(q)=f(-q)\}$ ist nach dem Borsuk-Ulam-satz nicht leer. Wenn für $q \in A$ $f^{-1}(-f(q))$ mehr als zwei Elemente be-

sitzt, kommen wir wie im ersten Teil zu einem Widerspruch. Diesen Widerspruch erhalten wir auch dann, wenn $f^{-1}(-f(q))$ zwei Punkte enthält, die nicht antipodisch sind. oBdA nehmen wir daher an, daß $q=e_1$, $f(q)=e_1$, $f^{-1}(-e_1)=\{e_2,-e_2\}$, $f(S^1_1)=S^1_1$ und $f|S^1_1:S^1_1\to S^1_1; z\mapsto z^2$ ist. Wegen der Voraussetzung über die Dehnungsmenge ist für $q\in S^1_1$ und $p\in S^{n-1}_2$ die Länge von $f(G(q,p))$ kleiner als π, womit die Voraussetzungen von (II.4.1) erfüllt sind. Weil aber $S^n(f|S^1_1)$ Grad 2 besitzt, ist $\langle f\rangle$ in $\pi^s_1 = \mathbb{Z}_2$ ein zweifaches Element, also o.

Wegen $|f^{-1}(-f(q))|=1$ gibt es zu jedem Antipodenpaar $(\pm q)\subset A$ einen eindeutig bestimmten Meridian $G(q,-q;x_q)$ und Großkreis G_q, auf dem dieser Meridian liegt. ((Das Bild eines Meridians ist ein Großkreis in S^n, also eine der endlich vielen Zusammenhangskomponenten von N. Es gibt also nur endlich viele verschiedene Großkreise G_q. Besitzen zwei Meridiane $G(q_1,-q_1;x_{q_1})$ und $G(q_2,-q_2;x_{q_2})$ einen nichtleeren Schnitt, liegen sie auf demselben Großkreis. Daraus folgt sofort, daß A eine endliche, gerade Anzahl von Zusammenhangskomponenten besitzt, die zu abgeschlossenen, 1-dimensionalen (, möglicherweise auch ausgearteten) Intervallen homöomorph sind. Wir bezeichnen sie mit $I_1,\ldots,I_{21}$.))

Definiere nun eine stetige, injektive Abb. $g:U_{i=1}^{21} I_i :\to \mathbb{R}^+ - o$. Dehne diese Abbildung zu einer stetigen Abbildung $g:S^{n+1}\to\mathbb{R}^+ - o$ aus. Nun betrachten wir die Abb. $H(f,g)\colon S^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}; x\to g(x)\cdot f(x)$. Nach dem BORSUK-ULAM-Theorem gibt es ein $y\in S^{n+1}$, so daß gilt:

$H(f,g)(y)=H(f,g)(-y)$. Das aber ist äquivalent zu:

$g(y)f(y)=g(-y)f(-y) \Leftrightarrow g(y)=g(-y)$ und $f(y)=f(-y)$. Damit haben wir

ebenfalls einen Widerspruch erhalten, denn aus f(y)=f(-y) folgt y∈A. Aber g ist auf A injektiv. Es kann nicht g(y)=g(-y) sein.

Für den zweiten Teil des Satzes können wir den Beweis bis auf die Doppelklammer ungeändert übernehmen. Anstelle der Doppelklammer schließen wir so: M hat als einfach geschlossene Kurve endliche Länge. Daher hat A nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, d als abgeschlossene Intervalle $I_1, \ldots, I_{21}$ auf endlich vielen Großkreisen liegen.

Damit ist (II.4.3) bewiesen. Ω

Die Vermutung δα=4, $o \neq \alpha \in \pi_4(S^2) = \mathbb{Z}_2$, war Ausgangspunkt für die Unte suchung in § 4. Uns beschäftigte die Frage, ob für einen Lift $\bar{f}: S^m \to S^3$ einer Abb. $f: S^m \to S^2$ nicht ein Punkt $x \in \Delta(f)$ existiert mit $\dim(T\Delta_x(f)) \geq 2$, falls f eine minimale Abbildung und $\bar{f}$ ein L mit kleinstmöglicher Dehnung ist.

Abschließend sei noch bemerkt, daß das Theorem 33.1 aus (4) für Dehnung zwei nicht mehr Information liefert als unser Beweis. Mi einigen Sätzen von YANG über die Anzahl von Durchmessern, die au einen Punkt abgebildet werden, könnte man noch einiges über die Dehnungsmenge für Dehnung zwei beweisen, was uns aber nicht sond lich interessant erscheint. Lohnend erscheint uns eher die Unter suchung des folgenden Problems:

Ist $f: S^{n+1} \to S^n$ eine nichtnullhomotope Abbildung mit Dehnung zwe enthält dann die Dehnungsmenge eine Groß-S^3 (, die von der Einhä gung einer Abbildung aus $H_2^3(2)$ stammt) ?

III ABBILDUNGEN MIT DEHNUNG GRÖßER ALS ZWEI

In diesem Kapitel versuchen wir auf eine ganz andere Weise als in (II.4) die Vermutung $\delta\alpha=4$, $o\neq\alpha\in\pi_4(S^2)$, zu beweisen. Sei h ein Element aus $H_2^3(2)$ mit $\gamma(h)=1$. Eine Abb. $f:S^m \to S^2$, $m>2$, möge einen Lift $\bar{f}:S^m \to S^3$ besitzen, für den es einen Punkt $q\in S^m$ gibt, so daß $h(\bar{f}(q))\neq h(\bar{f}(-q))$ ist. Dann läßt sich $\bar{f}$ in eine Abb. g deformieren, die alle Wege $G(q,u)$, $u\in S^{m-1}(q)$, so in S^3 abbildet, daß sie immer senkrecht zu den Fasern von h laufen, und alle Wege $G(u,-q)$ so, daß ihr Bild ganz in $h^{-1}(f(-q))$ liegt. Daraus folgt in einigen Fällen, daß f Dehnung größer gleich fünf haben muß. Generell gilt: Wenn die Dehnung kleiner als vier ist, ist $\bar{f}$ eine Suspension. (Leider erhält man $o\neq\alpha\in\pi_4(S^2)$ durch Komposition von h mit einer Suspension. Daher ist obige Vermutung noch immer offen.) § 2 bringt den Beweis der Tatsache, daß jede nichtnullhomotope Abbildung von einer Sphäre der Dimension größer als drei in die S^2 mindestens Dehnung drei haben muß. Im anschließenden Paragraphen machen wir einige Bemerkungen zu der Beziehung zwischen Dehnung und Jamesfiltrierung und zu den Arbeiten von ROITBERG, der diese Beziehung schon vor uns studiert hat.

§ o Eine spezielle Deformation

Diese Deformation ließe sich allgemeiner formulieren. Wir wollen sie aber nur an Hopffaserungen der Einfachheit wegen erläutern. Sei h ein Element aus $H_n^{2n-1}(2)$, $n\in\{2,4,8\}$.

(III.o.1) Lemma : Sei $f:S^m \to S^{2n-1}$ eine stetige Abbildung, für die ein Punkt $q\in S^m$ existiert mit: $h(f(q))$ ist

ungleich $h(f(-q))$. Dann läßt sich f so deformieren, daß für alle $u \in S^{m-1}(q)$ die Bilder der Wege $G(q,u)$ nur noch orthogonal zu den Fasern von h, die Bilder der Wege $G(u,-q)$ nur noch ganz in der Faser durch $f(-q)$ verlaufen.

Beweis : Die Dehnung von f sei a. $[a]$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich a. Teile jeden Meridian $M(q,-q;u)$ in $2 \cdot l$ gleichlange Teile, wobei $l = 2 \cdot ([a]+1)$ ist. (Wir betrachten die Deformation von f nur auf einem Meridian, da die Konstruktionen stetig in u sind.) Sei $1 \leq i < l$, $1 \leq j \leq 2 \cdot l$. Die Teilpunkte sind $q_o = q$, .. , $q_{2i-1} = (\pi \cdot 2 \cdot (i-1)/2 \cdot l + \pi/2 \cdot l, u)$, $q_{2i} = (\pi \cdot i/l, u)$, .. $q_{2 \cdot l} = -q$. Die Längen von $f(G(q_{j-1}, q_j))$ sind alle kleiner als $\pi/4$.

$L(q_{2i})$ sei der Fußpunkt des Lotes von $f(q_{2i})$ auf die Faser von h durch $f(q_{2i+2})$. Definiere den Weg $w^o_{2i,1} : [\pi \cdot i/l, \pi/2 \cdot l + \pi \cdot i/l] \to S^{2n-1}$, so daß er $G(f(q_{2i}), L(q_{2i}))$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Definiere $w^o_{2i,2} : [\pi \cdot i/l + \pi/2 \cdot l, \pi \cdot (i+1)/l] \to S^{2n-1}$, so daß er $G(L(q_{2i}), f(q_{2i+2}))$ prop. zur Bogenl. param. . Durch Zusammensetzen der Wege $w^o_{2i,1}$ und $w^o_{2i,2}$ erhalten wir den Weg $w^o_{2i} : [\pi \cdot i/l, \pi \cdot (i+1)/l] \to S^{2n-1}$.

$f_1 | [\pi \cdot i/l, \pi \cdot (i+1)/l] := w^o_{2i}$. Dann ist f_1 eine stetige Abbildung und der Abstand zu f ist kleiner als π. Also sind f und f_1 homotop.

Wir nehmen an, k Deformationen seien durchgeführt und f_k sei definiert. Wir geben f_{k+1} mit einem Abstand kleiner als π zu f_k an, woraus wieder die k+1-te Deformation folgt.

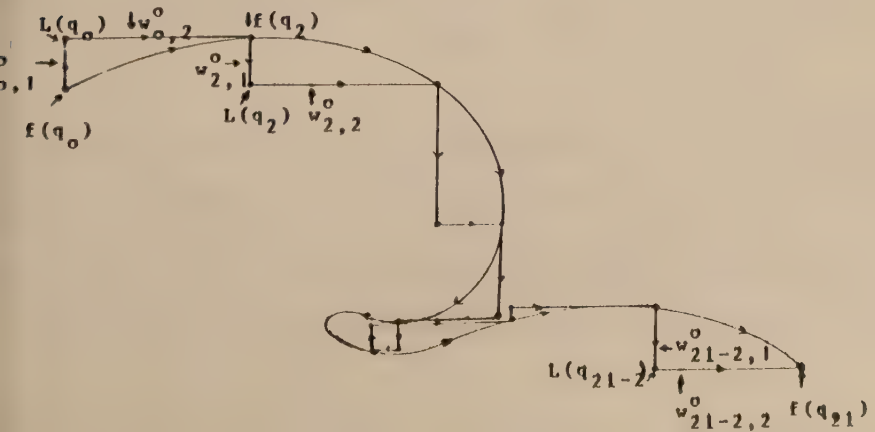
$f_{k+1}|[o,\pi k/21]:=f_k|[o,\pi k/21]$, $f_{k+1}|[\pi(21-k)/21,\pi]:=f_k|[\pi(21-k)/21,\pi]$

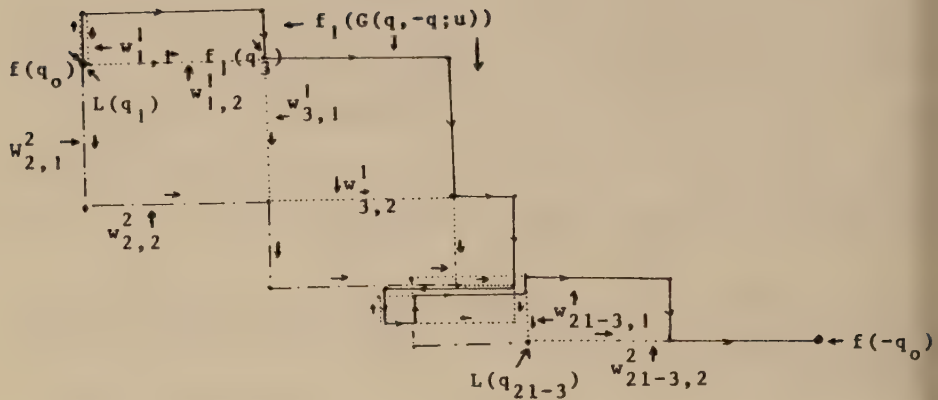
sei $o\leq r\leq 1-(k+1)$. $L(q_{k+2r})$ sei der Fußpunkt des Lotes von $f_k(q_{k+2r})$ auf die Faser durch $f_k(q_{k+2r+2})$. $w^k_{k+2r,1}:[\pi(k+2r)/1,\pi(k+2r+1)/21] \to S^{2n-1}$ parametrisiere $G(f_k(q_{k+2r}),L(q_{k+2r}))$ prop. zur Bogenlänge. $w^k_{k+2r,2}:[\pi(k+2r+1)/21,\pi(k+2r+2)/21] \to S^{2n-1}$ param. $G(L(q_{k+2r}), f_k(q_{k+2r+2}))$ prop. zur Bogenlänge. w^k_{k+2r} entstehe durch Zusammensetzung der beiden Wege $w^k_{k+2r,1}$ und $w^k_{k+2r,2}$.

Definiere $f_{k+1}|[\pi(k+2r)/21,\pi(k+2r+2)/21]:=w^k_{k+2r}$. Dann ist f_{k+1} stetig und $d(f_k,f_{k+1})<\pi$.

Nach 1 Deformationen ist die Aufspaltung der Abbildung f in einen horizontalen und einen vertikalen Teil beendet. Ω

Bemerkung : Die Deformation von f hätte man auch durch Liften einer geeigneten Deformation von hof erhalten können. Die Konstruktion der Deformation wird durch die beiden nachstehenden Zeichnungen völlig klar:





§ 1 Wann ist der Lift einer Abbildung nach S^2 eine Suspension

(III.1.1) Satz : $f:S^m \to S^2$, $m>2$, eine stetige Abbildung und $d:=\max\{d(f(q),f(-q))\,|\,q\in S^m\}$. Wenn die Dehnung von f kleiner als $4+d$ ist, ist f der Komposition einer Hopffaserung mit einer Suspension homotop.

Beweis : Wir spalten f wie in (III.o.1) auf. Dann lassen sich die Kurven, die orthogonal zu den Fasern verlaufen, wenn d groß und die Dehnung kleiner als $4+d$ ist, so verkürzen, daß man explizit die Gestalt einer Suspension erhält. Die Deformationen sind alle ziemlich offensichtlich.

ir nehmen d≠o an. Wenn d=o und die Dehnung von f kleiner als vier
st, kann man das Korollar aus (III.2) anwenden, um zu beweisen,
aß f sogar nullhomotop ist. Sei q ein Punkt aus S^m mit d(f(q),f(-q))
leich d. Sei $h\in H_2^3(2)$. f besitzt einen Lift $\bar{f}:S^m \to S^3$. Dann hat
(q) einen Abstand kleiner gleich $\pi/2-d/2$ zu $h^{-1}(-f(-q))$. L(q) sei
er Fußpunkt des Lotes von $\bar{f}(q)$ auf diese Faser.

ir wenden auf die Abbildung $\bar{f}$ (III.o.1) an. Sei f_1 die deformierte
bbildung, die die Eigenschaften aus (III.o.1) hat. Deformiere f_1
adurch, daß das Bild von G(q,u) zuerst $G(L(q),\bar{f}(q))$ und dann
$_1(G(q,u))$ durchläuft. Das ist eine Deformation von f_1 in die Abb.
$_{1+1}$, die auf der abgeschlossenen unteren Hemisphäre mit f_1 überein-
timmt.

un wende man auf alle Kurven $f_{1+1}(G(q,u))$, $u\in S^{m-1}(q)$, gleichzeitig
as Deformationsverfahren von MORSE an, wie es z.B. in ([8]) beschrie-
en worden ist. Da die Länge einer solchen Kurve kleiner als $2\pi+d/2+$
$/2-d/2$ ist, kann man in endlich vielen Schritten erreichen, daß
urven mit denselben Endpunkten entstehen, die kürzer als 2π sind.
as ist eine Deformation von f_{1+1} auf der oberen Hemisphäre. Zusam-
en mit der konstanten Deformation auf der unteren Hemispäre ergibt
ich eine Abb. f_{1+2}. Die Deformation von f_{1+2} in eine Suspension ist
un klar:

ei $o<j<1$. (Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Beweis von (III.o.1)
ie j-te Deformation sei ausgeführt, f_{1+2+j} konstruiert und $u\in S^{m-1}(q)$.

$_{1+2+j+1}(G(q_{1+j+1},-q))=f_{1+2}(G(q_{1+j+1},-q))$. $w_u^j:[o,\pi(1+j+1)/21] \to S^3$

sei $f_{1+2+j} | G(q,(\pi(1+j+1)/21,u))$. Diese Wege besitzen alle eine Länge kleiner als $2\pi+\pi/4$. Mit dem obigen Verkürzungsverfahren werden alle Wege w_u^j gleichzeitig solange gekürzt, bis alle kürzer als 2π sind. Wir erhalten die Abbildung $f_{j+1+1+2}$.

Beim letzten dieser Deformationsschritte verkürzen wir die Wege w_u^{1-1} solange, bis sie Länge kleiner gleich $3\pi/2$ haben. Jetzt ist es offensichtlich, wie man zur Einhängung, wie sie in der Einleitung definiert wurde, weiterdeformiert. Ω

§ 2 Jede nichtnullhomotope Abbildung von S^m, m>3, nach S^2 besitzt mindestens die Dehnung drei.

(III.2.1) Satz : Sei $f:S^m \to S^2$ eine stetige Abbildung mit Dehnung kleiner als drei. Dann ist f nullhomotop.

Beweis : Die Beweisidee besteht darin, aus den Urbildern von zwei regulären Werten einfachgeschlossene Kurven c_1, c_2 auszuwählen, so daß für einen Lift $\bar{f}$ von f nach S^3 eine nichtnullhomotope Abb. $S^3 \to c_1 * c_2 \xrightarrow{\bar{f}} S^3$ existiert. Wenn m größer als 3 ist, hat man einen Widerspruch gefunden.

Wir können annehmen, daß f mehr als m-2-mal stetig differenzierbar ist. Sonst approximieren wir f durch solche Abbildungen, die dann ebenfalls Dehnung kleiner als drei haben. Nach dem SARD-Theorem kann man einen Punkt $p \in S^2$ finden, so daß -p und p reguläre Werte von f sind. Sei $h \in H_2^3(2)$. $S_1^1 := h^{-1}(p)$ und $h^{-1}(-p) =: S_2^1$; $U_p := f^{-1}(p)$ und $U_{-p} := f^{-1}(-p)$. $\bar{f}:S^m \to S^3$ sei ein Lift von f bezüglich h.

Dann ist $\bar{f}_*: \pi_1(U_p) \to \pi_1(S^1_1) = \mathbb{Z}$ nicht der o-Homomorphismus.

Sei das nicht der Fall, T eine hinreichend kleine Tubenumgebung von U_p und $S^1_1 \times D^2$ eine triviale Umgebung von S^1_1 in S^3. Fasse $\bar{f}|T$ auf als Abbildung von $U_p \times D^2$ nach $S^1_1 \times D^2$. Da diese Abbildung einen trivialen Homomorphismus der ersten Homotopiegruppen induziert, läßt sich $\bar{f}$ auf dieser Menge in die universelle Überlagerung $\mathbb{R}^1 \times D^2$ von $S^1_1 \times D^2$ hochheben. Dort aber ist es klar, wie man deformieren muß, um eine Abb. auf T zu erhalten, die nicht mehr auf S^1_1 surjektiv abbildet: Der Lift von $\bar{f}|T$ sei F. Definiere folgende Homotopie

$$U_p \times D^2 \times [o,1] \to \mathbb{R}^1 \times D^2;\ (x,v,t) \to (1-(1-\|v\|)t\ )F(x,v)$$

Für t=o ist das die Abb. F. Für t=1 erhalten wir auf U_p eine konstante Abb.. Auf dem Rand ist die Homotopie konstant. Durch Projektion auf $S^1_1 \times D^2$ erhalten wir eine Deformation von $\bar{f}$ in eine Abbildung $g: S^m \to S^3$, die nicht mehr surjektiv ist. Dann ist auch $\langle f \rangle = o$.

$\bar{f}$ induziert also einen nichttrivialen Homomorphismus der Fundamentalgruppen. C_1 sei eine abgeschlossene 1-dim. Untermfg., die mit positivem Grad c_1 auf S^1_1 durch $\bar{f}$ abgebildet werde. (Orientierungen seien geeignet gewählt.) C_2 sei eine abgeschlossene 1-dim. Umfg. von U_{-p}, die von $\bar{f}$ mit positivem Grad c_2 auf S^1_2 abgebildet werde. Enthält C_1 einen Punkt q, dessen Antipode -q in C_2 liegt, folgt sofort, daß f eine Suspension und daher nullhomotop ist: die Kurven f(G(q,-q;u) sind kürzer als 3π. Aber f(q)=-f(-q). Man kann nun mit dem MORSE-Verfahren solange verkürzen, bis alle Kurven kleiner gleich π Bogenlänge haben. Eine Suspension nach S^3 ist $\simeq o$.

Bilde nun $S_1^1 \subset S^3$ mit Grad 1 auf C_1 ab, $S_2^1 \subset S^3$ mit Grad 1 auf C_2 und die Geodätischen $G(q,p')$ auf die Geodätischen, die die Bilder von q und p' verbinden. Wir nennen diese Abb. $i: S^3 \to S^m$. Die Abbildung $\bar{f} \circ i$ ist eine Abbildung der S^3 auf sich. Wir behaupten nun:

$$\deg(\bar{f} \circ i) = c_1 \cdot c_2 .$$

Wenden wir nun die Deformation aus § o auf die Kurven $\bar{f} \circ i(G(q,p'))$ an, erhalten wir Kurven, die orthogonal zu Fasern während der erst Hälfte, in der zweiten Hälfte aber ganz in S_2^1 verlaufen. Das Kurve stück, das senkrecht zu den Fasern von h verläuft, hat Länge klei- er als $3\pi/2$. Wenden wir daher das MORSE-Verfahren auf alle Kurven $\bar{f} \circ i(G(q, (\pi/4, q, p')))$ gleichzeitig an, können alle Kurven auf eine Länge von $\pi/2$ verkürzt werden. Das"Zurückspulen" auf dem zweiten Teil der Geodätischen erfolgt völlig analog zu dem "Zurückspulen" von f_{1+2} zu der Suspension f_{21+2}. Man sieht sofort, daß $\bar{f} \circ i$ zu $S^2(\bar{f} \circ i | S_1^1) * S^2(\bar{f} \circ i | S_2^1)$ mit dem Grad $c_1 \cdot c_2$ homotop ist.

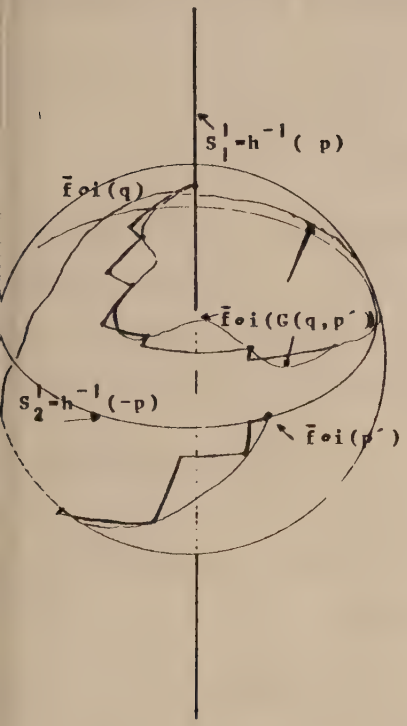
Wenn aber $m>3$ ist, muß aber $\deg(\bar{f} \circ i) = o$ sein. Ein Widerspruch also.

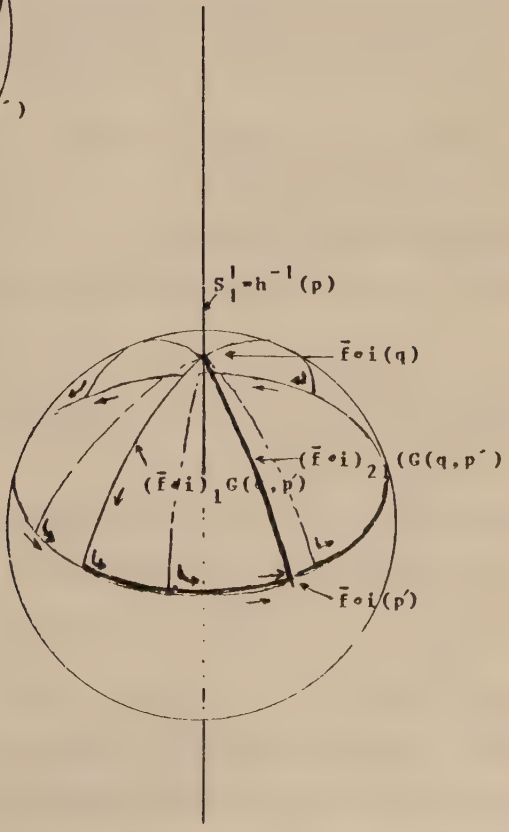
Ω

Wir haben in dem Beweis mehr gezeigt, als wir im Satz angegeben ha ben. Jenachdem wie die Lage der 1-dimensionalen Untermannigfaltig keiten zueinander ist, läßt sich eine größere untere Schranke für die Dehnung ermitteln.

(III.2.2) Korollar : Sei $f: S^m \to S^2$ eine stetige Abbildung und $d := \max\{ d(f(q), f(-q)) \mid q \in S^m \}$. Dann ist $\langle f \rangle = o$, wenn die Dehnung kleiner als $3 + (1 - d/\pi)$ ist.

emerkung : Mit zwei Zeichnungen zeigen wir, daß das Verkürzen und " Zurückspulen " im Beweis von Satz III.2.1) problemlos möglich ist.





§ 3 Filtrierung und Dehnung

Wir wollen zunächst die Definition der Filtrierungsinvarianten einer Sphärenabbildung angeben. p_1, p_2 seien zwei nicht konjugierte Punkte in S^n.

$$\Omega(S^n;p_1,p_2) := \{w \mid w:[o,1] \to S^n,\ w(o)=p_1\ ,\ w(1)=p_2\}$$

ist zu einem CW-Komplex Ω homotopieäquivalent, dessen $k(n-1)$-Gerüst mit Ω^k bezeichnet werden soll. $j_k: \Omega^k \to \Omega$ ist die Inklusion.

$$\Omega = S^{n-1} \cup e^{2(n-1)} \cup \ldots \cup e^{i(n-1)} \cup \ldots$$

Sei $f:S^m \to S^n$ eine surjektive Abbildung, $q_1 \in f^{-1}(p_1)$, $q_2 \in f^{-1}(p_2)$,

$$S^{m-1}(q_1,q_2) := \{q \in S^m \mid q=\sin(t)x+\cos(t)/|q_1+q_2|(q_1+q_2),\ t\in[o,\pi],\ x\in S^{m-1}(q_1)\cap S^{m-1}(q_2)\}.$$

Der Weg $w_u:[o,\pi] \to S^n$ parametrisiere $G(q_1,u)*G(u,q_2)$ prop. zur Bogenlänge. Dann ist die zu f adjungierte Abbildung

$$ad(f):S^{m-1}=S^{m-1}(q_1,q_2) \to \Omega(S^n;p_1,p_2)\ ;\ u \to f\circ w_u$$

$$filt<f> = \min\{k \mid ad<f> \in im(j_{k*}),\ j_{k*}:\pi_{m-1}(\Omega^k) \to \pi_{m-1}(\Omega)=\pi_{m-1}(\Omega(S^n;p_1,p$$

Offensichtlich gilt: $<f> = o \Leftrightarrow filt<f> = o$ und $<f> \in im(\Sigma) \Leftrightarrow filt<f> =$
JAMES hat die Filtrierungsinvariante mit seinen"reduced-product-spaces" studiert und folgende Ergebnisse in (13) bewiesen:

(III.3.1) ZItat aus (13): Sei $\beta \in \pi_{r+1}(S^{m+1})$, $\alpha \in \pi_{m+1}(S^{n+1})$, $m>1$, $n>1$. Dann ist $\mathrm{filt}\alpha\circ\beta < \mathrm{filt}\alpha \cdot \mathrm{filt}\beta$ und i.a. gilt nicht die Gleichheit.

Ist $m=2n$ und α eine Klasse mit Hopfinv. 1, dann ist $\mathrm{filt}\alpha\circ\beta = 2\,\mathrm{filt}\beta$.

Die Elemente der Ordnung p in $\pi_{2p}(S^3)$ und $\pi_{4p-3}(S^3)$ haben Filtrierung p-1. Die Elemente der Ordnung p in $\pi_{4p-2}(S^3)$ haben Filtrierung p.

Einer Idee von LAWSON folgend bewies ROITBERG folgenden ZUsammenhang zwischen Dehnung und Filtrierungsinvarianten:

(III.3.2) Zitat aus (23): $\alpha \in \pi_m(S^n)$, $m>n\geq 2$ und $\delta\alpha < k+2$. Dann ist

$$\mathrm{filt}\,\alpha \leq \begin{cases} k & \text{falls } k>0 \text{ und gerade} \\ k+1 & \text{falls } k\geq 1 \text{ und ungerade.} \end{cases}$$

Falls m gerade und $2\alpha \neq 0$ ist, folgt immer $\mathrm{filt}\alpha \leq k$.

Unser Satz (III.1.1) ist ein Spezialfall dieses Theorems: Ist die Dehnung kleiner als vier, so ist die Filtrierungsinv. kleiner gleich zwei. Betrachtet man Abb. nach S^2 folgt mit dem zweiten Teil von (III.3.1), daß man die Komposition einer Suspension mit einer Hopffaserung vorliegen hat. Ist m gerade und die KLasse mit sich selbst addiert nicht null, existiert fUr jeden Repräsentanten ein Antipodenpaar, das er auf ein Antipodenpaar abbildet (nach einem Lemma von LAWSON). Für S^2-Abbildungen folgt dann genau wie aus (III.1.1), daß die Dehnung nicht kleiner als 5 sein kann, wenn die Abbildung nicht Komposition einer Suspension mit einer Faserung ist.

ROITBERG fragt nun, da für die Dehnung ebenfalls $\bar{\delta}(f\circ g)\leq\bar{\delta}(f)\cdot\bar{\delta}(g)$ gilt, ob nicht für die Homotopieklassen mit Hopfinv. 1 erfüllt ist $\delta<h\circ f>=2\cdot\delta<f>$, h eine Hopffaserung mit Hopfinv. 1. Wir geben Gegenbeispiele dazu an:

Die Klasse mit Hopfinv. 2 aus $\pi_3(S^2)$ erhält man durch Hopfkonstruktion aus einer Abb. $B:S^1\times S^1\to S^1$ mit a=1 und b=2 , a und b wie in (II.o.5). Nach (II.o.5) hat dann diese Klasse Dehnung kleiner gleich drei, was der obigen Aussage widerspricht.

Oder man hängt $h\in H_2^3(2)$, $\gamma(h)=1$, so ein, daß $S^5(h)$ differenzierbar mit Dehnung zwei ist und $S^5(h)(\Delta(S^5(h))=S_1^2$ ist. Man kann nun H aus $H_4^7(2)$ mit $\gamma(H)=1$ so wählen, daß S_1^2 in einer Faser von H liegt. Daher ist $\delta<H\circ S^5(h)>\ <\ 4$ im Widerspruch zu obiger Vermutung.

Für Abbildungen auf S^2 von Sphären der Dimension größer als drei haben wir kein Gegenbeispiel finden können. ROITBERGS Vermutung geht noch über die von OLIVIER hinaus. (s. S. 32 dazu.)

Außerdem gibt ROITBERG eine obere Schranke für eine Klasse α_3 der Ordnung drei in $\pi_6(S^3)$ an: $\delta\alpha_3\leq 16$. Wir werden eine sehr viel kleinere obere Schranke in (V.2) angeben können, da wir ein Erzeugendes mit einer minimalen Abbildung der Dehnung drei repräsentieren können.

JAMES fragt, ob es eine Sphäre S^n, n>3, gibt, so daß man zu jedem $k\in\mathbb{N}$ ein m und ein $\alpha\in\pi_m(S^n)$ mit filt(α)>k finden kann. (Das Resultat für S^3 erhält man wegen der bekannten Struktur von ΩS^2 (siehe (22) (III.3.2) zeigt, was für die Dehnung aus dieser Frage folgt.

IV. DEHNUNG, GRAD UND HOPFINVARIANTE

Es sollen nun die nichtendlichen Homotopiegruppen von Sphären un-
rsucht werden. Im Fall $\pi_k(S^k)$, $k>1$, beweisen wir, daß die Dehnung
ner Klasse mit Grad n größer als $\sqrt[k]{n}$ ist. Man erwartet vielleicht,
ß eine stetige Abbildung mit Grad n und Dehnung $\sqrt[k]{n}$ lokal topolo-
sch ist. Wir können aber nur zeigen, daß eine solche Abbildung die-
Eigenschaft bis auf eine Menge vom Maß null hat. Doch genügt die-
Aussage, um mit dem Transformationssatz für topologische lipschitz-
etige Abbildungen zu einem Widerspruch zu kommen. In (9) wurde schon
n Beweis für die Existenz einer Konstanten C(k) angedeutet, so daß
r eine Klasse mit Grad n die Dehnung kleiner gleich $C(k)\cdot\sqrt[k]{n}$ ist.
f diesen Sachverhalt gehen wir nur kurz ein, weil wir keinen Weg se-
n, ein minimales C(k) zu bestimmen.

Im Fall $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ ermöglicht uns die bekannte Integraldarstellung
r Hopfinvarianten von WHITEHEAD zusammen mit Abschätzungen aus der
eorie elliptischer partieller Differentialgleichungen die Aussage,
ß es eine Konstante $C_1(4k-1)>0$ gibt und eine Klasse mit Hopfinv.
Dehnung größer gleich $C_1(4k-1)\cdot\sqrt[4k]{n}$ besitzt. Es gibt ferner eine
nstante $C_2(4k-1)$, so daß $C_2(4k-1)\cdot\sqrt[4k-1]{n}$ eine obere Schranke für die
hnung einer Klasse mit Hopfinv. $\pm n$ ist. Für geeignetes n gelingt uns
gar die Abschätzung $C_3(4k-1)\cdot\sqrt[4k]{n}$ von oben. Wir erläutern kurz, wie
n vielleicht eine gute Abschätzung für die Konstante $C_1(4k-1)$ erhal-
n kann.

§ 0 Vorbereitungen und die Sätze von RESHETNYAK

$k,n):=\inf\{\delta(f)\mid f:S^k \to S^k\ C^1\text{-differenzierbar und } \deg(f)=n\}$

i w eine C^∞ k-Form auf S^k, die $\int_{S^k} w = 1$ erfüllt. Dann gilt immer:

Ist $f:S^k \to S^k$ eine C^1-Abbildung, so ist $\deg(f) = \int_{S^k} f^* w$. w soll im folgenden $1/\mathrm{Vol}(S^k)\cdot V$ sein, wenn V die kanonische Volumenform ist.

Für die folgenden Aussagen geben wir als Referenz die Arbeit (2o) an. Sie ist sehr breit angelegt und enthält Standarddefinitionen wi die von $W_k^1(U,\mathbb{R}^k)$ und der zugehörigen Sobolevnorm $\| \ \|_{W_k^1(U,\mathbb{R}^k)}$.

$U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f:U \to \mathbb{R}^k$ aus $W_k^1(U,\mathbb{R}^k)$. Dann bezeichnet
$d(x,f) = \Sigma_{i=1}^k \partial f/\partial x_i \ (x)$ das (schwache) Differential im Punkt x,
$\lambda(x,f) = \Sigma_{i=1}^k \Sigma_{j=1}^k \left|\frac{\partial f}{\partial x_i} j(x)\right|^2$ eine spezielle Norm des Differentials und
$J(x,f) = \det(d(x,f))$ die Determinante des Differentials.

Sei $A=((a_{ij}))$ eine k×k-Matrix mit $\det(A)\neq o$. A bildet Sphären in Ell soide ab. Das Verhältnis der längsten zur kürzesten Halbachse nenne wir q(A). $q(A)\geq 1$ und $q(A)=1$ genau dann, wenn $A\in O(k)$. Es gibt eine F tion auf den regulären k×k-Matrizen, die jeder Matrix A die kleinst Konstante K(A) zuordnet, so daß folgende Ungleichung gültig ist:

$$k^{k/2}|\det(A)| \leq (\Sigma_{i=1}^k \Sigma_{j=1}^k a_{ij}^2)^{k/2} \leq k^{k/2} K(A) |\det(A)|$$

K ist stetig, größer gleich 1 und $\lim K(A)=1$, falls A gegen eine Matrix B mit $q(B)=1$ konvergiert.

Die Abb. $L:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ ist stetig und $\lim_{k\to 1} L(k)=1$.

$$k \mapsto \max\{q(A) \mid K(A)\leq k\}$$

Obige Ungleichung , die Abbildung K und L motivieren zusammen die folgende Definition.

o.1) Definition : $f \in W^1_k(U,\mathbb{R}^k)$ ist von beschränkter Distorsion genau dann, wenn es eine kleinste Konstante $K(f) \geq 1$ gibt, so daß für fast alle x gilt:

$$\lambda(x,f)^{k/2} \leq k^{k/2} K(f) J(x,f)$$

eine Abb. mit beschr. Distorsion ist f.f.a. x $J(x,f) \geq o$, f.f.a. t $J(x,f) = o$ verschwinden sämtliche partielle Ableitungen, und f.f. mit $J(x,f) > o$ ist $q((\frac{\partial f}{\partial x_i}j))$ beschränkt. Die kleinste obere anke nennen wir q(f).

$G \subset \mathbb{R}^k$ ein kompaktes Gebiet und $g: G \to \mathbb{R}^k$ stetig ist, so ist für $y \notin \partial(G)$ der Grad $\mu(y,g)$ von g bezgl. y definiert. $N(y,g,G) := |\{x \in G | = y\}|$ ist die Anzahl der Urbilder von y.

o.2) Definition : $f: U \to \mathbb{R}^k$ hat beschränkten Index genau dann, wenn für jedes kompakte Gebiet G in U und jedes $y \notin \partial(G)$ gilt:

$\mu(y, f|G)$ ist beschränkt (durch eine feste Zahl).

o.3)Zitat aus (21) : Jede Abb. mit beschränkter Distorsion besitzt beschränkten Index.

o.4)Zitat aus (20) : Sei $f: U \to \mathbb{R}^k$ von beschr. Distorsion. Dann gilt für jedes kompakte Gebiet $G \subset U$ und $y \notin \partial(G)$: $N(y,f|G,G) \leq \mu(y,f|G)$

diesem Theorem ergeben sich sofort die Sätze, die wir benötigen:

(IV.o.5) Zitat aus (2_0) : $f:U \to \mathbb{R}^k$ von beschr. Dist. und $\deg(x_o,f$
Dann ist f auf einer Umgebung von x_0 to
logisch und die Dimension der Verzweigu
menge von f ist kleiner gleich k-2.

Der Beweis von (IV.o.4) ist ziemlich technisch, und RESHETNYAK ha
uns daher die Hauptarbeit für den Beweis von $d(k,n)>^k\sqrt{n}$ abgenomme

§ 1 Beweis von $d(k,n)>^k\sqrt{n}$

(IV.1.1) Lemma : $f:S^k \to S^k$ lipschitzstetig und surjektiv
Dann gibt es einen Punkt $p\in S^k$, der nur
endlich-viele Urbilder $q_1,\ldots,q_r$ besitzt

Beweis : Sei $y\in S^k$ und x ein Urbild von y. Es sol
$P_y:S^k-\{y\} \to \mathbb{R}^k$ die stereographische Pr
jektion sein. Außerdem sei $o<\varepsilon<<1$ gegeben. Es bezeichnet B das Bi
von $S^k-U(y,\varepsilon)$ unter P_y und $A=P_x(f^{-1}(S^k-U(y;\varepsilon)))$. Dann haben wir f
gende Abbildung: $A \xrightarrow{P_x} f^{-1}(S^k-U(y;\varepsilon)) \xrightarrow{f} S^k-U(y;\varepsilon) \xrightarrow{P_y} B$, die
wir F nennen wollen. F ist lipschitzstetig , A und B haben beschr
tes, von null verschiedenes k-dimensionales Hausdorffmaß. Daher e
gibt sich die Existenz eines Punktes p mit endlichvielen Urbilde
aus (IV.1.2). (IV.1.2) ist Korollar 2.1o.11 aus (6).

(IV.1.2) Zitat aus (6) : Wenn f eine Lipschitzabbildung von eine
separablen, vollständigen metrischen Rä
X in einen metrischen Raum Y, $o\leq m<\infty$ und
eine Boreluntermenge von X ist, so gilt
$(\mathrm{Lip}(f))^m\, H^m(A) \geq \int N(y,f|A,A)\,dH^m y$

enn U eine offene Menge mit hinreichend glattem Rand (z.B. C^2)
nd $f:U \to \mathbb{R}^k$ eine lipschitzstetige Abb. mit Konstante M ist, so ist
aus $W_k^1(U,\mathbb{R}^k)$, sogar nach einem Satz von RADEMACHER f.f.a. x (to-
al) differenzierbar . Es gibt dann eine Folge differenzierbarer
pb. $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, die auf einer offenen Menge U', die U umfaßt, defi-
iert sind, deren Dehnung durch eine Konstante M' beschränkt ist,
o daß $\lim_{m\to\infty} |f-f_m|_{W_k^1(U,\mathbb{R}^k)} = 0$ ist. Das folgt sofort, wenn man f durch
ollifier glättet. Wir benutzen diesen Sachverhalt im Beweis von

IV.1.3) Lemma : $f:S^k \to S^k$ lipschitzstetig. Dann gilt, wenn der Grad von f nicht null ist, $\int_{S^k} f^*w = \deg(f)$.

eweis : Sei p ein Punkt aus S^k mit den endlichvielen Urbildern $q_1, \dots, q_r$, $0<\varepsilon<<1$ Und die Abb. $U := P_{q_1}(S^k - UU(q_i;\varepsilon)) \xrightarrow{P} q_1^{-1} \to S^k - UU(q_i,\varepsilon) \xrightarrow{f} S^k - \{p\} \xrightarrow{P} p \to \mathbb{R}^k$ ist
ipschitzstetig. ε ist so gewählt, daß sich zwei Umgebungen $U(q_i;\varepsilon)$
nd $U(q_j;\varepsilon)$ weder schneiden noch berühren. Nun approximieren wir G
urch differenzierbare Abb. G_m , die auf $U' := P_{q_1}(S^k - UU(q_i;\varepsilon/2))$ de-
iniert sein mögen. $P_p^{-1} \circ G_m \circ P_{q_1}$ ist eine diffb. Abb. von $S^k - UU(q_i,\varepsilon/2)$
ach $S^k-\{p\}$. Wir basteln daraus eine Abb. $f_m: S^k \to S^k$, die zu f ho-
otop ist, indem wir $f|S^k - UU(q_i,\varepsilon) = P_p^{-1} \circ G_m \circ P_{q_1}$ setzen, aber eine Geo-
itische $G(q_i,u)$, $u\in \partial(U(q_i,\varepsilon))$, prop. zur Bogenlänge auf $G(p,f(u))=$
$p,P_p^{-1}\circ G_m \circ P_{q_i}(u))$ abbilden. Da die G_m G in $W_k^1(U,\mathbb{R}^k)$ approximieren,
halten wir die folgende Abschätzung :

$$g(f) = \int_{S^k} f_m^* w = \lim_{m\to\infty} \int_{S^k} f_m^* w = \lim_{m\to\infty} \int_{S^k - UU(q_i,\varepsilon)} f_m^* w + \lim_{m\to\infty} \int_{UU(q_i,\varepsilon)} f_m^* w$$

$$\leq \int_{S^k - UU(q_i,\varepsilon)} f^* w + r\cdot \mathrm{Vol}(U(q_1,\varepsilon)M'' \quad , \ M'' \text{ eine Konstante} \geq \mathrm{Lip}(f).$$

Wenn man nun ε gegen null konvergieren läßt, so erhält man tatsächlich die gewünschte Gleichung aus der letzten Ungleichung. Ω

(IV.1.4) Lemma : $f:S^k \to S^k$ sei eine stetige Abb. vom Grad n und besitze Dehnung $\sqrt[k]{n}$. Dann hat f beschr Distorsion.

Beweis : Aus $\lim_{m\to\infty} \int_U J(x,G_m) = \int_U J(x,G)$ haben wir in (IV.1.3) $\int_S kJ(x,f) = n\cdot\deg(f)$ geschlossen. Diese Gleichung aber impliziert sofort, daß f.f.a. x $J(x,f)=n$ sein mu Es muß sogar d(x,f) f.f.a. x eine Drehstreckung sein, also q(d(x,f Ω

(IV.1.5) Satz : $d(k,n) > \sqrt[k]{n}$

Beweis : Wenn wir $d(k,n) = \sqrt[k]{n}$ annehmen, gibt es eine stetige Abb. $f:S^k \to S^k$ vom Grad n und der Dehnung $\sqrt[k]{n}$, die nach (IV.1.4) beschr. Distorsion hat. Sei q ein Punkt aus S^k, der nicht in der Verzweigungsmenge von f liegt, und $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $U(q;\varepsilon)$ noch ganz im Komplement der Verzweig. enthalten ist. f ist auf $U(q,\varepsilon)$ topologisch. Nach dem Transformationssatz für $f|U(q,\varepsilon)$ gilt: $\int_{f(U(q;\varepsilon))} w = \int_{U(q;\varepsilon)} f^* w$. Aber das Integral $\int_{f(U(q;\varepsilon))} w \leq \int_{U(f(q),\sqrt[k]{n}\varepsilon)} w < \frac{1}{\text{vol}(S^k)} \cdot \text{Vol}(U(q;\varepsilon))$. Das ist ein Widerspruch. (Für flache Mannigfaltigkeiten erhält man auf diese Weise keinen Widerspruch.) Ω

§ 2 Allgemeine obere und untere Schranken für die Dehnung einer Homotopieklasse mit gegebener Hopfinvariante

w ist wieder eine C^∞ k-Form auf S^k mit $\int_{S^k} w = 1$. $F^p(M)$ bezeichne

$C^\infty(M)$-Modul der C^∞ p-Formen auf der orientierten kompakten n-dim.
igfaltigkeit M. $*:F^p(M) \to F^{n-p}(M)$, $d:F^p(M) \to F^{p-1}(M)$ und
$(-1)^{n(p+1)+1} *d*:F^p(M) \to F^{p-1}(M)$ und $\Delta=\delta d+d\delta:F^p(M) \to F^p(M)$ sind
bekannte Operatoren. Wenn α und β p-Formen sind, läßt sich ein
arprodukt einführen:

$$<\alpha,\beta>=\int_M \alpha\wedge *\beta$$

HODGE-Dekompositions-Theorem besagt, daß bezgl. dieses Skp. gilt:
I)=$\Delta(F^p(M))\oplus H^p$, wobei $\Delta(F^p(M))$ das Bild des Laplace-Operators
H^p der endlichdimensionale Raum der harmonischen p-Formen η ($\Delta\eta=o$)
M ist. Der Greensche Operator G: $F^p(M) \to \Delta F^p(M)$ ordnet einer Form
die eindeutige Lösung β zu mit $\Delta\beta=\alpha-H(\alpha)$, wenn $H(\alpha)$ den harmoni-
en Anteil von α bezeichnet. G ist zu Δ invers, wenn $H^p = o$ ist. In
em Fall kommutiert G mit allen Operatoren, mit denen Δ kommutiert.
dem Satz von DE RHAM ist $H^{2k} = o$ für $M=S^{4k-1}$, $k>1$, denn die 2k-te
logie $H^{2k}(S^{4k-1};\mathbb{Z})$ ist null.

$f:S^{4k-1} \to S^{2k}$ eine C^∞-Abbildung. f^*w ist eine 2k-Form auf S^{4k-1},
geschlossen ist, weil w geschlossen ist. α erfülle $d\alpha=f^*w$. J.H.C.
EHEAD hat gezeigt, daß das folgende Integral ganzzahlig ist und
von der Homotopieklasse von f abhängt. Es ist gleich der von HOPF
Hilfe von Verschlingungszahlen von Urbildzyklen definierten Inva-
ten.

$$\int_{S^{4k-1}} \alpha\wedge f^*w = \gamma(f) \text{ und } |\gamma(f)| = |<\alpha, *f^*w>|$$

re Aufgabe wird darin bestehen, ausgezeichnete Lösungen der Glei-
g $d\alpha=f^*w$ zu suchen.

2.1) Lemma : Es gelte $\Delta\beta=f^*w$. Dann ist $d\delta\beta=f^*w$.

is : $d\delta\beta=\Delta\beta-\delta d\beta$. Das Resultat folgt, wenn $d\beta=o$ ist.

Da G zu Δ invers ist, muß $G(f^{\bullet}w)=\beta$ sein. d kommutiert mit Δ, also auch G. Weil aber $f^{\bullet}w$ geschlossen ist, gilt: $dG(f^{\bullet}w)=G(df^{\bullet}w)=o=d\beta$.

Wir wollen nun wiederholen, wie man induktiv beweisen kann, daß ei Konstante C(k) existiert, so daß $C(k)\cdot\sqrt[k]{n}$ eine obere Schranke für Dehnung der Klasse mit Grad n ist. Für k=1 kann man C(k)=1 wählen. Wir nehmen an, die Existenz der Konstanten C(k-1) sei bewiesen. Ze Wir schneiden S^k mit affinen Hyperebenen parallel zu $\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^{k+1}$, so daß die Schnitte S^{k-1}_i auf S^k Abstand π/s besitzen, $s\geq 2$. n_i sei der maximale Grad, mit dem S^{k-1}_i durch eine Abb. $f_i:S^{k-1}_i\to S^{k-1}$ unter de Bedingung $\bar{\delta}(f_i)\leq s$ abgebildet werden kann. Dann existiert eine stet ge Abb. $F_i:U(S^{k-1}_i;\pi/2s)\to S^k$, F_i konst. auf den Randkomp., $\deg(F_i)$ $\bar{\delta}(F_i)\leq s$. Mit Hilfe der Konstanten C(k-1) gelingt die Abschätzung $\Sigma n_i \geq 1/C\, s^k$. Die F_i setzen sich zu F mit Grad Σn_i zusammen. C will man so klein wie möglich haben. (Eine erheblich schlechtere Abschä zung ergibt die Anzahl der Punkte auf S^k mit Abst. π/s. (vergl.(9;

Es sei nun $g:S^{4k-1}\to S^{2k}$ ein Erzeugendes des freien Anteiles von $\pi_{4k-1}(S^{2k})$. Wir können g z.B. aus einer Abb. $S^{2k-1}\times S^{2k-1}\to S^{2k-1}$ die auf dem ersten Faktor eine Abb. vom Grad 2 mit Dehnung 2 und auf dem zweiten eine orthogonale Abb. induziert, durch Hopfkonstru tion gewinnen. Diese können wir noch so einrichten wegen (II.o.5), daß die Dehnung von g kleiner gleich drei ist. (siehe auch (9,S.64 Durch Komposition von g mit Abb. $S^{4k-1}\to S^{4k-1}$ vom Grad n erhalten wir die Klasse mit Hopfinv. 2n. Die Dehnung können wir durch $3C(4k\sqrt[4k-1]{n}$ abschätzen. Schalten wir aber eine Abb. $S^{2k}\to S^{2k}$ hinter g, so erhalten wir Hopfinv. $2n^2$, wenn die Abb. Grad n hatte. Die Deh nung ist kleiner gleich $3C(2k)\cdot\sqrt[2k]{n} = \frac{3C(2k)}{\sqrt[4k]{2}}\cdot\sqrt[4k]{2n^2}$. Diese Abschätz wird man sich für alle Klassen wünschen; eine Beweisidee fehlt le

V.2.2) Satz : Es gibt eine Konstante $C_1(4k-1)>0$, so daß für eine Klasse $\alpha\in\pi_{4k-1}(S^{2k})$ gilt:

$$\delta(\alpha) \geq C_1(4k-1)\cdot\sqrt[4k]{|\gamma(\alpha)|}$$

weis : Da Δ ein elliptischer Operator auf S^{4k-1} ist, läßt sich die Lösung von $\Delta\beta=f^*w$ in einer hon Sobolevnorm abschätzen. Dadurch gewinnt man mit dem Sobolevlemma schätzungen für die Ableitungen der Lösung. Mit der Schwarzschengleichung für das Hodgeskp. ist man dann fertig.

Sei w eine 2k-Form auf S^{2k} wie oben. Wähle ne C^∞-Abbildung f mit $\delta(\alpha)=\delta(f)-\varepsilon$ und betrachte f^*w. Die sup-Norm $^*w|_\infty \leq \delta(f)^{2k}|w|_\infty$ benutzen wir nun, um die Lösung β mit $\Delta\beta=f^*w$ abzuhätzen. Dazu wählen wir eine feste Überdeckung von S^{4k-1} mit Bällen $p_i;2s)$, so daß die Bälle $U(p_i;s)$ ebenfalls noch S^{4k-1} überdecken. muß $s<\pi/2$ sein. Δ ist ein elliptischer Operator auf $G_i:=U(p_i;2s)$. G_i löst $\Delta\beta|_{G_i} = f^*w|_{G_i}$. Dasselbe gilt für $G_i':=U(p_i;s)$. Nun können r die Lösung auf dem kleinen Gebiet G_i' durch die Kenntnis von f^*w f G_i abschätzen:

V.2.3) $$|\beta|^{G_i'}_{2,r} \leq C\,(\,|f^*w|^{G_i}_{o,r} + |\beta|^{G_i}_{o,2}\,)\,, \quad C > o$$

e Konstante C hängt nur von den beiden Gebieten G_i und G_i' ab. Da es ine harmonischen Formen gibt, können wir $|\beta|^{G_i}_{o,2}$ mit Hilfe des kleinen Eigenwertes von Δ abschätzen:

$$|\beta|^{G_i}_{o,2} \leq |\beta|^{S^{4k-1}}_{o,2} \leq 1/\lambda|f^*w|^{S^{4k-1}}_{o,2} \leq 1/\lambda|f^*w|_\infty$$

sammen mit $|f^*w|^{G_i}_{o,r} \leq |f^*w|^{S^{4k-1}}_{\infty}$ erhalten wir $|\beta|^{G_i}_{2,r} \leq C'|f^*w|^{S^{4k-1}}_{\infty}$.

(C>o). Die rechte Seite hängt nicht mehr von r ab. Mit dem SOBOLE
Lemma kann man nun schließen, daß es eine positive Konstante $\bar{C}$ g

$$|\beta|^{G}_{1,-} \leq \bar{C}|f^{*}w|_{-}$$

Durch Vergleich dieser Abschätzungen auf allen Gebieten G'_1 erhält
man schließlich eine positive Konstante C_o mit

$$|\beta|_{1,-} \leq C_o|f^{*}w|_{-}$$

| | sei die Norm, die von dem Hodgeskp. kommt.(| | ≤ C´| |_) Dann

$|\gamma(\alpha)|=|<\delta\beta,*f^{*}w>|\leq|\delta\beta|\ |*f^{*}w| \leq |\delta\beta|_{-}|f^{*}w|_{-}C^{\prime\prime\prime}$, da * eine Isome

Diese Abschätzung mit der Abschätzung für $|f^{*}w|_{-}$ mit Hilfe der De
nung und der Abschätzung der sup-Norm der Ableitungen von β ergib
endlich die gewünschte Ungleichung:

$|\delta\beta|_{-}|f^{*}w|_{-}C^{\prime\prime\prime} \leq C'(4k-1)|f^{*}w|^{2}_{-}\leq \bar{C}(4k-1)\cdot\delta(f)^{2-2k}$. Da die Kon
stante nur von S^{4k-1}, S^{2k}, w und der festen Einteilung der Gebiet
abhängt, ist der Satz bewiesen.

Einen anderen Beweis könnte man folgendermaßen führen: Es gilt ja
$G(f^{*}w)-\beta$. G besitzt einen Kern, gegen den man integriert, um β
erhalten. DE RHAM hat die Singularität dieses Kernes bestimmt. Ma
sieht beim Differenzieren, daß das Integral über die Ableitung de
Kernes noch beschränkt bleibt. Bei guter Kenntnis des Greenschen
nes müßte man eine gute Abschätzung für $C_1(4k-1)$ erhalten.

V. BEISPIELE

Im letzten Kapitel diskutieren wir einige konkrete Beispiele von
härenabbildungen. Zum Schluß von Kapitel I hatten wir bemerkt,
s es für S^2-Abbildungen eine sehr einfache Methode gibt, um
²,n)>2 für |n|>2 zu beweisen. Das wesentliche Hilfsmittel ist da-
die Umlaufzahl einer Kurve um eine Achse. Man wählt eine stück-
ise geodätische Kurve in der Urbildsphäre, deren Eckpunkte auf
Äquator bzgl. eines ausgezeichneten Antipodenpaares abgebildet
rden, die das Urbild eines Punktes des Antipodenpaares vom Urbild
Antipoden trennt, aber zu kurz ist, um eine Umlaufzahl gleich
Grad für die Bildkurve zu ermöglichen. Dann geben wir eine dif-
renzierbare Abbildung $S^6 \to S^3$ an, die Dehnung drei besitzt und
imal in ihrer Homotopieklasse ist, welche $\pi_6(S^3)$ erzeugt. Dadurch
halten wir niedrige Obere Schranken für alle Klassen aus $\pi_6(S^3)$.
chließend stellen wir weitere Sphärenabbildungen vor, die mini-
sind, und untersuchen deren Dehnungsmengen. Schließlich erwäh-
wir noch Sphärenabbildungen, von denen, wenn sie differenzier-
sind, die Minimalität vermutet wird oder, wenn sie minimal sind,
ht bekannt ist, ob sie mit derselben Dehnung geglättet werden
nen. Den Schluß des Kapitels bilden einige Rechnungen, die für
e Deformation einer Abbildung $S^5 \to S^3$ benötigt werden.

Untere Schranken für Abbildungen der Zweisphäre auf sich

1.1) Satz : $d(2,4)>2$

eis : Dieses Ergebnis ist schon aus (IV.1) bekannt.
Die Beweisidee wurde schon erläutert.

Wir nehmen an d(2,4)=2. Dann existiert eine (stetige) Abbildung f von S^2 auf sich mit Dehnung zwei und Grad vier. Sie bildet mindestens ein Antipodenpaar auf einen Punkt ab. oBdA sei $f(e_3)=f(-e_3)=e_1$. $S^1(e_3)=:S_1^1$ sei der Äquator in der Urbildsphäre, $S_2^1:=S^1(e_1)$ d in der Bildsphäre. Dann muß $f^{-1}(e_1)\subset S_1^1$ sein. Je nach Lage von f^{-1} in S_1^1 konstruieren wir einen Widerspruch.

1.Fall : $f^{-1}(e_1)$ liegt gesammelt in S_1^1

q_1 und q_1' seien die am weitesten auseinand liegenden Punkte aus $f^{-1}(e_1)$ und A bezeichne das kürzere, abgesch sene Intervall auf S_1^1, das sie beranden. Wähle einen Punkt q_2 in $U(q_1;\varepsilon)\cap(S_1^1-A)$ und einen Punkt q_2' in $U(q_1';\varepsilon)\cap(S_1^1-A)$, $o<\varepsilon<\pi/4$. Dann gibt es einen Punkt q_3 auf $G(q_2,e_3)$, der in S_2^1 abgebildet wi und einen Punkt q_4 in $G(q_2,-e_3)$, dessen Bild ebenfalls in S_2^1 lie Ferner gibt es Punkte q_5 und q_6 aus $G(q_2',e_3)$ resp. $G(q_2',-e_3)$, de Bild in S_2^1 enthalten ist. Dann trennt die folgende geschlossene Kurve die Urbilder von e_1 und $-e_1$. Die Länge der Kurve ist klei als 4π. Daher hat ihre Bildkurve nicht Umlaufzahl 4 um die Achse durch e_1 und $-e_1$. Die Kurve ist:

$G((\pi/4,q_1),(\pi/4,q_1'),\ q_5,\ q_6,\ (-\pi/4,q_1'),\ (-\pi/4,q_1),\ q_4,\ q_3,\ (\pi/4,$

2.Fall : $f^{-1}(e_1)$ liegt zerstreut auf S_1^1, aber in einer abgeschlossenen Hemisphäre.

q_1 und $q_1'=-q_1$ seien die Randpunkte der abgeschl. Hemisphäre A. Existiert ein weiterer Punkt $\pm q_1\neq q_1''\in f^{-1}(e_1)\subset A$, so wählt man zur Konstruktion der Punkte q_2 und q_2' $o<\varepsilon<\min(d(q_1,q_1''),\ d(q_1',q_1''))$. Die Punkte q_3, q_4, q_5 und q_6 werden wieder wie in Fall 1 gewählt. $G(q_3,\ (\pi/4,q_1''),\ q_5,\ q_6,\ (-\pi/4,q_1''),\ q_4,\ q_3)$ hat Bogenlänge kürz als 3π. Daher hat die Bildkurve nicht Umlaufzahl 4.

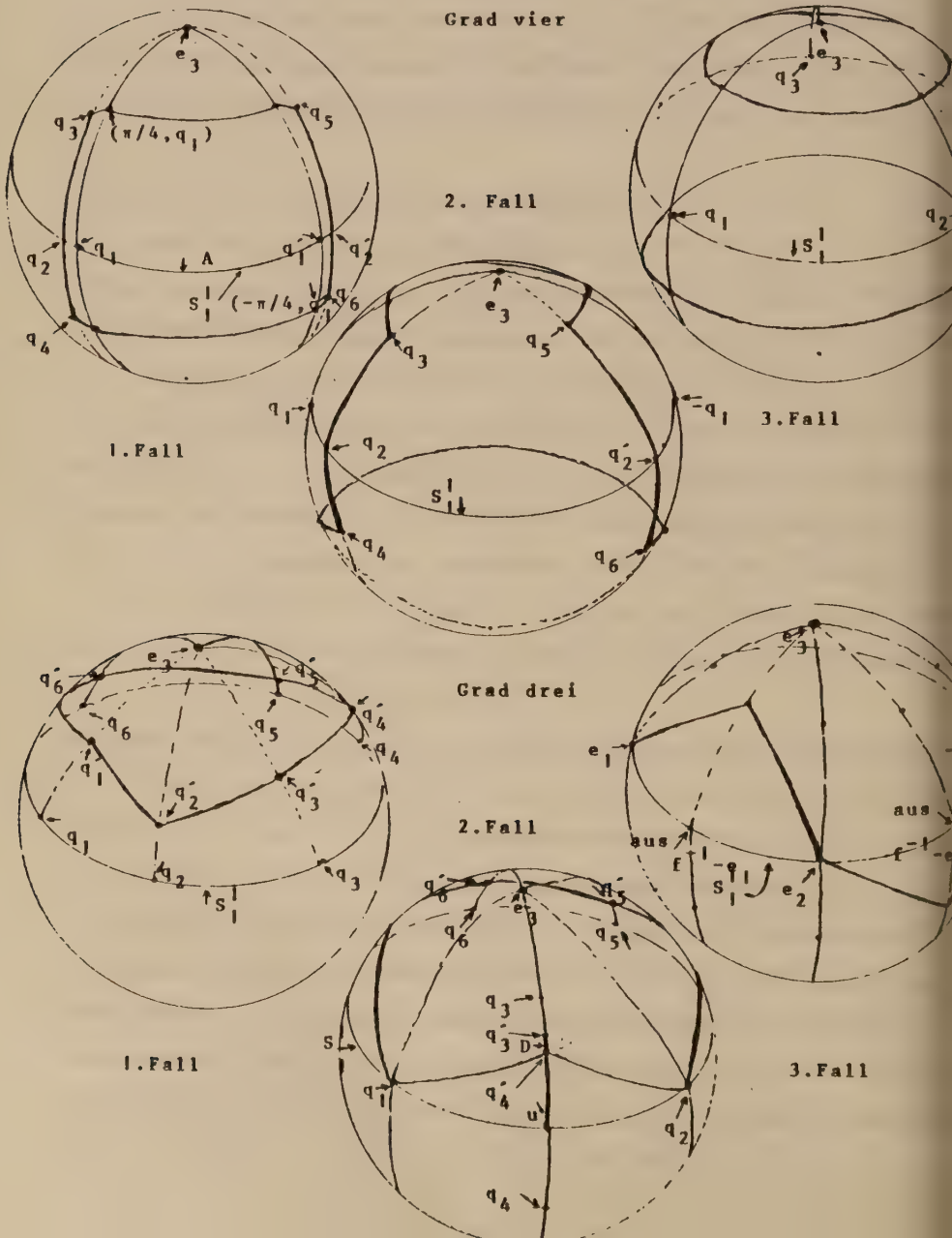
nd $\pm q_1$ die einzigen Urbilder von e_1, nehmen wir oBdA $q_1=e_1$ an.
hle q_3 aus $G(e_3,\sqrt{2}/2e_1+\sqrt{2}/2e_2)$, q_4 aus $G(-e_3,ae_1+ae_2)$, q_5 aus
$e_3,ae_1-ae_2)$, q_6 aus $G(-e_3,ae_1-ae_2)$ so aus, daß ihr Bild immer in
liegt; $a=\sqrt{2}/2$. $G(q_3,q_4,q_6,q_5,q_3)$ hat Länge kleiner als 2π. Die
ldkurve hat höchstens Umlaufzahl 1. Analog kann man $-q_1$ einschlie-
n. Daher kann die Abbildung nicht Grad vier haben.

Fall : $f^{-1}(e_1)$ liegt zerstreut auf S^1_1 und nicht in nur in einer abgeschlossenen Hemisphäre.

nn $f^{-1}(e_1)$ aus zwei Antipodenpaaren $\pm q_1$ und $\pm q_2$ besteht, liefern
e beiden folgenden Kurven der Länge kleiner2π einen Widerspruch:
$(\pi/4,q_1)$, $(\pi/4,q_2)$, $(\pi/4,-q_1)$, $(\pi/4,-q_2)$, $(\pi/4,q_1))$ und
$(-\pi/4,q_1)$, $(-\pi/4,q_2)$, $(-\pi/4,-q_1)$, $(-\pi/4,-q_2)$, $(-\pi/4,q_1))$
nnen wir drei Punkte q_1,q_2,q_3 aus $f^{-1}(e_1)$ so auswählen, daß der
weilige Abstand zueinander kleiner als π ist, erhalten wir durch
e beiden noch kürzeren Kurven einen Widerspruch:
$(\pi/4,q_1)$, $(\pi/4,q_2)$, $(\pi/4,q_3)$, $(\pi/4,q_1))$ und
$(-\pi/4,q_1)$, $(-\pi/4,q_2)$, $(-\pi/4, q_3)$, $(-\pi/4,q_1))$. Ω

t derselben Methode behandeln wir d(2,3). Bisher haben wir noch
inen Satz angegeben, der d(2,3)=2 widerspräche. Der Beweis von
.1.2) ist auch deshalb interessant, weil sich mit einer noch in-
nsiveren Ausnutzung der Methode eine untere Schranke für d(2,3)
stimmen läßt, die größer als zwei ist. Sowohl die Klassen mit
trag des Grades gleich vier als auch die mit Betrag des Grades
eich drei sind Beispiele für Klassen, deren Dehnung keine ganze
ıl ist. Leider haben wir solche Beispiele für Abbildungen zwischen
ären unterschiedlicher Dimension bisher nicht nachweisen können.

Bemerkung : Die einzelnen Fälle von (V.1.1) und (V.1.2) erläutern die folgenden Zeichnungen.



.1.2) Satz : $d(2,3)>2$

weis : Wir nehmen $d(2,3)=2$ an. Dann existiert eine stetige Abb. f der S^2 auf sich vom Grad 3 d mit Dehnung 2. OBdA soll $f(e_3)=e_1$, $f(-e_3)=-e_1$, $S_1^1=S^1(e_3)$ der uator der Urbild-, $S_2^1=S^1(e_1)$ der der Bildsphäre sein. $f^{-1}(S_2^1)$ ist der abgeschlossenen $\pi/4$-Umgebung von S_1^1 enthalten. Auf jedem ridian gibt es einen Punkt, dessen Bild in S_2^1 liegt. e_3 ist der rdpol, $-e_3$ der Südpol der Urbildsphäre. Je nach Lage von $^1(S_2^1)\cap S_1^1$ in S_1^1 ergibt sich ein Widerspruch. Es gibt mehrere Fälle:

Fall : $f^{-1}(S_2^1) \cap S_1^1 = \emptyset$

q_1 und q_2 seien zwei Punkte auf S_1^1 mit Abstand einer als $\pi/2$. Auf dem kurzen Intervall von S_1^1, das von q_1 und q_2 randet wird, liegt kein Punkt aus $f^{-1}(S_2^1)$. Für jede solche Situaon nehmen wir an, $f^{-1}(S_2^1)$ liege ganz in der nördlichen offenen Hesphäre. Also gibt es einen Punkt $q_1' \in G(q_1,e_3)$ und einen Punkt q_2' s $G(q_2,e_3)$, die von f beide in S_2^1 abgebildet werden. Dann trennt dem Gebiet, das von $G(e_3,-e_3;q_1)$ und $G(e_3,-e_3;q_2)$ berandet wird, q_1',q_2' $f^{-1}(e_1)$ von $f^{-1}(-e_1)$. Andernfalls ergäbe sich ein Widerruch dazu, daß in diesem Gebiet kein Punkt aus $f^{-1}(S_2^1)$ auf dem uator liegt. Wähle nun $q_1, \ldots, q_6$ aus S_1^1, so daß zwei benachbar- Punkte Abstand $\pi/3$ haben. Definiere Punkte $q_1', \ldots, q_6'$ wie oben nn trennt die folgende Kurve mit Bogenlänge kleiner als 3π die Urlder von $f^{-1}(e_1)$ und $f^{-1}(-e_1)$: $G(q_1',q_2',q_3',q_4',q_5',q_6',q_1')$.

Fall : $f^{-1}(S_2^1)\cap S_1^1$ liegt gesammelt in einem abgeschlossenen Intervall A.

$,q_2 \in f^{-1}(S_2^1)$ seien die Randpunkte von A. u sei der Punkt aus A, zu

dem q_1 und q_2 symmetrisch liegen. q_3 sei der nördlichste, q_4 der
südlichste Punkt aus $f^{-1}(S_2^1) \cap G(e_3,-e_3;u)$. B sei das geodätische
Dreieck mit den Seiten $G(q_1,q_3)$, $G(q_3,q_4)$ und $G(q_4,q_1)$, C das mit
den Seiten $G(q_2,q_3)$, $G(q_3,q_4)$ und $G(q_4,q_2)$. Wenn in B und C kein
Punkt aus $f^{-1}(e_1)$ liegt, trennen $G(q_1,q_3)$ und $G(q_3,q_2)$. Sei x ein
Punkt aus $f^{-1}(e_1) \cap B$, so daß $G(q_1,-q_1;x) \cap G(e_3,-e_3;u)$ am südlichste
trifft von allen Punkten aus $f^{-1}(e_1) \cap B$. Es gibt, weil der Abstand
von x zu $G(e_3,-e_3;u)$ kleiner als $\pi/4$ ist, ein Intervall D auf die
sem Meridian, das südlicher als q_3 liegt. Es werde von q_3' und q_4'
berandet. D soll die Eigenschaft $f(D) \subset U(e_1;\pi/2)$ haben! Wenn nun i
C kein Punkt aus $f^{-1}(-e_1)$ liegt, trennen $G(q_1,q_4')$ und $G(q_4',q_2)$. S
y ein Punkt aus $C \cap f^{-1}(-e_1)$, so daß $G(q_2,-q_2;y)$ $G(e_3,-e_3;u)$ am nö
lichsten von allen Punkten aus $f^{-1}(-e_1) \cap C$ trifft. Daher gibt es e
Intervall D'mit den Randpunkten q_3''und q_4'' und $f(D') \cap U(-e_1;\pi/2)$.
liegt südlicher als D. I.a wird q_4' nördlicher als q_3''liegen. Es i
daher klar, daß $G(q_1,q_4'),G(q_4',q_2)$ trennen. Teile das Komplement v
A in vier gleiche Teile durch die Punkte q_5, q_6 und q_7. Definiere
q_5', q_6' und q_7' wie oben. $f^{-1}(e_1)$ und $f^{-1}(-e_1)$ werden durch die fol
de Kurve der Bogenlänge kleiner als 3π getrennt: $G(q_1,q_5',q_6',q_7',q_2$
$q_4',q_1)$

3.Fall : $f^{-1}(S_2^1) \cap S_1^1$ liegt zerstreut auf S_1^1.

Wenn wir drei Punkte aus dem Schnitt auswä
len können, die zueinander nicht antipodisch und zerstreut sind,
struiert man eine trennende Kurve der Bogenlänge kleiner als 3π w
in Fall 2, indem man je zwei Punkte als q_1 und q_2 von oben auffa
Besteht der Schnitt aus zwei nicht orthogonalen Durchmessern, ve
bindet man die Punkte mit Abstand kleiner als $\pi/2$ und verfährt f
die beiden längeren Intervalle wie in Fall 2. Wenn die Durchmess

orthogonal sind, verbindet man die Punkte, zwischen denen kein Element aus $f^{-1}(\pm e_1)$ liegt. ObdA sei $f(e_1)$ und $f(e_2)$ dann aus S_2^1 und $f(ae_1+ae_2)=e_1$, $a = \sqrt{2}/2$. Dann trennt $G(e_1, e_1/2+e_2/2+ae_3)$ und $G(e_1/2+e_2/2+ae_3, e_2)$. Die Länge eines solchen Stückes ist $\arccos(1/2)=\pi/3$. Man benötigt maximal 8 dieser Stücke. Die entstehende trennende Kurve hat immer noch Länge kleiner als 3π. Liegt der Schnitt in einer abgeschlossenen Hemisphäre, so verbindet man, wenn noch ein weiterer Punkt aus dem Schnitt in der offenen Hemisphäre liegt, diesen mit dem Randpunkt, zu dem er Abstand kleiner als $\pi/2$, und verfährt auf dem größeren Stück wie in Fall 2. Das komplementäre Intervall wird in drei gleichlange Teile geteilt. Die trennende Kurve ist nun offensichtlich zu definieren. Ist der Schnitt aber die Vereinigung eines Antipodenpaares mit einem orthogonalen Punkt, verfährt man wie im Fall der orthogonalen Durchmesser: man kann immer trennen mit einer Kurve der Länge kleiner als $4\pi/3$. Die komplementäre Hemisphäre wird wieder in drei gleiche Teile geteilt. Besteht aber der Schnitt nur aus einem Antipodenpaar, hat man im Grunde Fall 1 vorliegen: man kann $q_1'=q_1$ und $q_4'=q_4$ wählen.

Damit ist (V.1.2) bewiesen. Das bessere Resultat und die einfachere Methode sind durch längere Formulierungen erkauft worden. Ω

§ 2 Eine minimale Abbildung von S^6 auf S^3

(V.2.1) Lemma : Sei q eine reine Quaternion vom Betrag eins. S^3 seien die Quaternionen vom Betrag eins. Die folgende Abbildung ist aus $H_2^3(2)$:

$P_q: S^3 \to S^2 \; ; \; p \mapsto p\cdot q\cdot \bar{p}$

Beweis : $S^3 \to S^3$; $p \mapsto pq$ ist eine orthogonale Abb
türlich ist auch $S^3 \to S^3$; $p \mapsto \bar{p}$ orthogo
Daher hat die Abb. $F:S^3 \times S^3 \to S^3 \times S^3$; $(p,p') \mapsto (pq,\bar{p}')$ Dehnung 1.
Abb. $M:S^3 \times S^3 \to S^3$; $(p,p') \mapsto (p \cdot p')$ hat als Einschränkung einer
bil. Abb. Dehnung kleiner gleich $\sqrt{2}$. Die Abbildung $j: S^3 \to S^3 \times S$
$p \mapsto (p,p)$ hat offensichtlich Dehnung $\sqrt{2}$. P_q hat also Dehnung k
ner gleich 2, denn $P_q = M \circ F \circ j$. P_q ist differenzierbar. P_q ist ho
top zu P_i. Wenn wir zeigen können, daß $\gamma(P_i)$ Betrag 1 oder -1 h
sind wir fertig, denn dann sind alle P_q keine Suspensionen. Wen
pi=ip sein soll, dann muß p=cos(t)1+sin(t)i sein, $t \in [o,\pi 2]$. Wen
p(-i)=(-i)p sein soll, folgt p=cos(t)j+sin(t)k, $t \in [o,2\pi]$. Also
ist die Hopfinv. ungleich null, denn i und -i sind reg. Werte.

(V.2.2) Satz : Sei $g:S^3 \times S^2 \to S^2$ die Abb. $(p,q) \mapsto p \cdot q \cdot \bar{p}$
wobei S^2 die Menge der reinen Quaternion
vom Betrag eins ist. Dann gibt es eine A
$h \in C^1(o,o;\pi/2,\pi)$, so daß $J(g,h)$ differenz
bar ist, $\langle J(g,h) \rangle$ $\pi_6(S^3)$ erzeugt, $\delta\langle J(g,$
$\delta(J(g,h))=3$, $\Delta(J(g,h))=S^3 \times S^2$ und $T\Delta(J(g,$
$S^3 \times SO(3)$ gilt.

Beweis : Sei $P: S^3 \to SO(3)$ die zweifache Überlage
Es ist $g(p,q)=P(p)(q)$. Daß die Hopfkonst
tion von g $\pi_6(S^3)=\mathbb{Z}_{12}$ erzeugt, wurde von SERRE bewiesen. (3 ;S.
a und b sollen die Bedeutung wie in (II.o.5) haben. Nach (V.2.1
a=2 und b=1. Dann gibt es entsprechend (II.o.4) eine differenzi
re Abb. h, so daß die Dehnungsmenge $\cos(T)S^3 \times \sin(T)S^2$ ist, wobe
Zahl T durch $\cos^2(T)=a/a+b=2/3$ bestimmt ist. Man sieht sehr sch
daß das S^1-Bündel der Dehnungsmenge im Tangentialbündel $S^3 \times Tan$

albündel der S^2 ist. Weil die Dimension der Urbildsphäre gera- und die Ordnung von $<J(g,h)>$ 12 ist, folgt nach (III.3.2), daß (g,h) mindestens Dehnung drei haben muß. Also ist J(g,h) minimal.

Ω

V.2.3) Korollar : α_3 habe Ordnung 3 in $\pi_{2+3}(S^3)$. Dann ist $\delta\alpha_3 \leq 6$. Sei α beliebig aus $\pi_6(S^3)$. Dann ist $\delta\alpha \leq 9$.

eweis : Sei f_i eine Abb. der S^6 auf sich vom Grad i, $i\in\{o,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,6\}$. Dann ergibt sich je- e Klasse durch Komposition von J(g,h) mit einem f_i. Wir geben daher ine Tabelle für $\delta<f_i>$ an. Da $\delta<f_i>=d(6,i)$ und $d(6,i)=d(6,-i)$ ist, erner $d(6,o)=o$, $d(6,1)=1$ und $d(6,2)=2$ ist, gibt es nur noch vier ichttriviale Fälle zu behandeln:

	3	4	5
(6,i)	$d(6,3)\leq d(2,3)<3$	$d(6,4)=d(3,4)=2$	$d(6,5)\leq d(3,5)\leq 3$

nd $d(6,6)\leq\max(d(2,2),d(3,3))<3$

as ergibt die zweite Aussage. Die beiden Klassen der Ordnung 3 ntsprechen den Graden 4 und -4. Da es aber Abb. der S^6 auf sich m Grad 4 mit Dehnung 2 gibt, ist auch die erste Aussage bewiesen.

Ω

(g,h) ist das erste (und leider auch einzige) Beispiel für eine härenabbildung, die minimal ist und nicht Dehnung zwei besitzt. rner zeigt dieses Beispiel, daß i.a. die Filtrierungsinv. eine hte untere Schranke für die Dehnung einer Klasse ist. Man kann rmuten, daß die trivialen und orthogonalen Abb. sowie die Hopf-

faserungen die einzigen Abbildungen sind, für die die Filtrierun
invariante mit der Dehnungsinvariante übereinstimmt.

§ 3 Dehnungsmenge, Minimalität und Fortsetzbarkeit

Differenzierbare Abbildungen f mit Dehnung größer als eins lassen
sich so einhängen, daß Dehnung und Dehnungsmengen erhalten bleibe
Wir wollen das kurz erläutern. Sei q ein Punkt aus S^{m+1} und p ein
aus S^{n+1}, $f:S^m \to S^n$ eine diffb. Abb. mit $\delta(f)=1+a$, $a>0$, und
$C^1(o,o;\pi,\pi) := \{f \mid f:[o,\pi] \to [o,\pi],\ f(o)=o,\ f(\pi)=\pi$ und $f|(o,\pi)$ C^1-di

(V.3.1) Lemma : Fasse f auf als Abb. von $S^m(q)$ nach $S^n(p)$
Dann gibt es eine Abb. $h \in C^1(o,o;\pi,\pi)$, so
$S(f,q,p,h):S^{m+1} \to S^{n+1}$; $(t,\bar{q}) \mapsto (h(t),f(\bar{q}$
differenzierbar ist, dieselbe Dehnung bes
wie f und dieselben Dehnungsmengen wie f

Beweis : Sei $o<b<\frac{\pi a}{2(1+a)}$. Wähle eine Abb. h aus de
Menge $C^1(o,o;\pi,\pi)$ mit $h'(t)<1+a$, $h(\pi/2)=\pi$
$h(t)=o$ für $t\in[o,b]$, $h(t)<t$ für $t\in(o,\pi/2)$, $h(t)>t$ für $t\in(\pi/2,\pi)$ un
$h(t)=\pi$ für $t\in[\pi-b,\pi]$. Dann ist $S(f,q,p,h)$ differenzierbar und h
die gewünschten Eigenschaften. Es ist $S(f,q,p,h)|S^m(q)=f$.

Im Standardfall S(f) ist $q=e_{m+2}$, $p=e_{n+2}$ und h=id. Aber i.a. ist S
nicht differenzierbar in den Einhängungspunkten $\pm e_{m+2}$.

Die folgenden Abbildungen sind differenzierbar und minimal. Ihre
nung ist zwei. (Das einzige Beispiel für eine minimale Abb. mit
größer als zwei wurde schon in § 2 ausführlich diskutiert.)

7.3.2) $f:S^2 \to S^2$, $f=S(g,h)$, $g:S^1 \to S^1$; $z \mapsto z^2$ und h wie in (V.3.1). Einhängungen wie in (V.3.1) sind ebenfalls nicht-nullhomotop und minimal.

7.3.3) $f:S^{2n-1} \to S^n$; $(z_1,z_2) \mapsto (2z_1\bar{z}_2,\ z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2)$, $n\in\{2, 4, 8\}$. Einhängungen wie in (V.3.1) sind nicht-nullhomotop und min..

V.3.4) $f:S^{k+n} \to S^n$; $f=J(B)$, $B:\mathbb{R}^{k+1}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ normiert und bilinear. Wenn $\langle f\rangle \neq o$, sind die Einhängungen von f wie in (V.3.1) auch nicht-nullhomotop und minimal.

V.3.5) $f:S^{19} \to S^{16}$; $f=J(B)$, $B:\mathbb{R}^{10}\times\mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{16}$ das LAM-Beispiel (15): $B((x,z_1),(y,z_2))=(xy-z_1z_2,\bar{z}_2x+z_1\bar{y})\in\mathbb{R}^8\times\mathbb{R}^8$; $\mathbb{R}^8$ als Cayley-Zahlen und $\mathbb{R}^{10}=\mathbb{R}^8 \times \mathbb{C}$ aufgefaßt.

enn stetige Abbildungen mit Dehnung 2 auf die folgende Art entstehen, ind sie minimal. Es ist nicht bekannt, ob sie ohne Dehnungsvergrößerung geglättet werden können.

V.3.6) Sei f eine Abb., deren Einhängungen alle nicht nullhomotop sind und die Komposition von stetigen Abbildungen mit Dehnung 2 ist. Dann gibt es ein m, so daß $\bar{\delta}\langle S^m(f)\rangle = 2$ ist.

weis: OBdA sei f Komposition der beiden Abbildungen $f_1:S^{m_1} \to S^{n_1}$, $f_2:S^{n_1} \to S^k$. Fasse f_1 auf als Abb. $S^{m_1} \to S^{n_1}$, S^{m_1} in $S^{m_1+n_1+1}$ 1 in $S^{n_1+n_1+1}$. Fasse f_2 auf als Abb. $S^{n_1}_2 \to S^k_2$. Dann ist $S^{n_1+1}(f)$ motop zu $id|S^{n_1}_1 \circ f_2 \circ f_1 \circ id|S^{n_1}_2$. Nach (9;S. 27) ist die Dehnung $S^{n_1+1}(f) > \leq \max(\bar{\delta}(f_1),\bar{\delta}(f_2))$, da die Dehnungen von f_1 und f_2 eich 2 , also größer als eins sind. Ω

(V.3.7) Beispiele für (V.3.6) haben wir schon auf Seite und angegeben. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Abb. $f:S^1 \to S^1$ $f=g^n$, g wie in (V.3.2) gewählt. Es ergibt die 2n-2-fache Einhängung von f eine stetige Abbildung F $F:S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ vom Grad 2^n und der Dehnung 2.

Die folgenden differenzierbaren Abbildungen mit Dehnung größer s 2 sind vermutlich minimal. (V.3.8) soll nach einer Vermutung von VIER minimal mit Dehnung 4 sein. (III.2.1) legt nahe, daß (V.3.9 mit Dehnung drei minimal ist.

(V.3.8) $f:S^4 \to S^2$ $f=g\,S(g,h)$, $g\in H_2^3(2)$ und h wie in (V.3.1). Die Einhängung dieser Abbildung wird im nächsten Parag ausführlichst diskutiert.

(V.3.9) $f:S^3 \to S^2$ $f=J(g,h)$, $g:S^1\times S^1 \to S^1$;$(q,p) \to q-<q,p>2p$ und h wie in (V.2.2), denn a=2 und b=1 . $<\ ,\ >$ ist das kan.

Wir wollen die Dehnungsmengen der Beispiele näher b trachten.

(V.3.2)′: Die Dehnungsmenge ist eine Groß-S^1, der Äquator. Ihr B ist der Äquator der Bildsphäre. Im Tangentialbündel er ten wir das Tangentialbündel dieser S^1 als Dehnungsmen deren Bild das Tangentialbündel des Bildäquators ist.

(V.3.3)′: Da f Hopfkonstruktion einer normierten bilinearen Abb. bildet f Antipoden auf einen Punkt ab. Ist aber die Ho

konstruktion einer normierten bil. Abb. surj., muß die Dehnungsmenge die gesamte Urbildsphäre sein. f ist surjektiv.

Da $f \in H_n^{2n-1}(2)$ ist, ist die Dehnungsmenge von f ein n-dim. Unterbündel des Tangentialbündels von S^{2n-1}. Für n=8 kennen wir die Struktur des Bündels nicht. In den beiden anderen Fällen ist es trivial. Die Fasern von f sind in den Fällen n=2 und n=4 Linksnebenklassen von S^{n-1} in S^{2n-1}. Läßt man nun S^7 von links operieren auf S^7, werden Fasern in Fasern überführt. Die Richtungen, die maximal gedehnt werden, sind die Richtungen orthogonal zu den Fasern. Wählt man nun in $e_o \in S^7$ ein 7-Bein, dessen drei ersten Vektoren tangential an S^3 sind, transportiert die Operation der S^7 von links dieses 7-Bein in jeden Punkt aus S^7, wodurch sowohl eine Trivialisierung des Bündels der Faserrichtungen als auch des Bündels der Dehnungsrichtungen gegeben ist. Für n=2 ist der Bew. analo

V.3.4)': Wie die Dehnungsmenge der Abb. aussehen muß, ist nach dem ersten Teil von (V.3.3)' klar.

Die Tangentialvektoren der Länge 1, die maximal gedehnt werden, bilden eine 2k+n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Das wollen wir kurz beweisen:
Über jedem Punkt aus der Faser S_1^k erhalten wir S_2^{n-1} als Menge von Einheitsdehnungsvektoren. Über jedem Punkt der Faser S_2^{n-1} erhalten wir S_1^k als Einheitsdehnungsmenge. Sei nun $x \in S^{k+n} - (S_1^k \cup S_2^{n-1})$, $x = \cos(t)q + \sin(t)p$, $t \in (o, \pi/2)$, $q \in S_1^k$ und $p \in S_2^{n-1}$. Die durch t induzierte Richtung ist Dehnungsrichtung. Für festes t wie oben erhalten wir durch diese Dehnungsrichtungen ein triviales Bündel über $S_1^k \times S_2^{n-1}$. Wir müssen also nur noch die Dehnungsvektoren betrachten,

die an $\bar{S}^k \times \bar{S}^{n-1}$ tangential sind, $\bar{S}^k$ ist S^k mit Radius co
$\bar{S}^{n-1}$ S^{n-1} mit Radius sin(t). Das Differential von J(B)
ist die Einschränkung der linearen Abb.2(cos(t)B(q,)+si
B(,p)) auf den Tangentialraum von x über $\bar{S}^k \times \bar{S}^{n-1}$. B(q,
eine orthogonale Abb. . Sei v ein Tangentialvektor der
ge eins an x , der durch $\bar{S}^k$ induziert ist. Dann ist de
heitstangentialvektor sin(t)v+cos(t)B(q,)$^{-1}$(B(v,p)) i
Dehnungsmenge von f=J(B). Über einem Punkt aus $\bar{S}^k \times \bar{S}^{n-1}$
ben wir also als Einheitsdehnungsmenge eine S^k. Dieses
Bündel ist trivial, da es die Whitneysumme aus einem t
len Bündel und dem Bündel $T\bar{S}^k \times \bar{S}^{n-1}$ ist. Um zu zeigen,
die Einheitsdehnungsvektoren eine 2k+n-dimensionale Ma
faltigkeit bilden, müssen wir nur noch für jeden E.D.V
einem Punkt aus S^k_1 zeigen, daß er eine 2k+n-dim. Zelle
Umgebung besitzt. Sei $q \in S^k_1$ und $\bar{p} \in \bar{S}^{n-1}_2$ der E.D.V.. Sei
Dann bilden die Einheitsdehnungsvektoren:

sin(t)v+cos(t)B(q,)$^{-1}$(B(v,B(v,)$^{-1}$(B(q,$\bar{p}$)))) eine k+1

Läßt man $\bar{p}$ auf S^{n-1}_2 und q auf S^k_1 laufen, ergibt sich e
k+1+n-1+k-dim. Zelle. Zwar ist jeder Punkt aus S^{n-1}_2 re
gulär, doch wollen wir auch dort die 2k+n-Zelle angebe
Sei $\bar{p} \in \bar{S}^{n-1}_2$ gegeben und $q \in S^k_1$ Einheitstangentialvektor.
Dann bilden die folgenden Vektoren eine k+1-Zelle :

sin(t)q+cos(t)B($\bar{q}$,)$^{-1}$B(q,$\bar{p}$) , $\bar{q} \in S^k_1$ beliebig.

Läuft q auf S^k_1 und $\bar{p}$ auf S^{n-1}_2,erhält man eine 2k+n-Ze
Wir wollen die Mannigfaltigkeit der Tangentialvektoren
an S^{k+n} der Länge eins, die maximal gedehnt werden, mi

emerkung: M ist keine S^{2k+n}

eweis : M läßt sich mit zwei offenen Mengen überdecken, U_1 und U_2, die zu $S^k \times S^{n-1}$ deformiert werden können und deren Schnitt homöomorph zu $S^k \times S^k \times S^{n-1} \times I$ ist. Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz folgt nun für die n-1-te Homologie:

$$H_{n-1}(S^k \times S^k \times S^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} H_{n-1}(S^k \times S^{n-1}) \oplus H_{n-1}(S^k \times S^{n-1}) \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(M)$$

Wenn $H_{n-1}(M) = o$ ist, muß α surj. sein. Das ist aber nur für $2k=n-1$ möglich, da $k+1<n$ sein soll und $k>o$. Aber man sieht sofort, daß nach der Tabelle in (II.2.2) n nur für k=o ungerade sein könnte. Doch den Fall der reellen Skalarmultiplikation betrachten wir hier nicht. Damit ist unsere Bemerkung bewiesen. Ω

.3.5)': Nach (V.3.3)' ist die Dehnungsmenge S^{19} , ihr Bild S^{16}. Um die Dehnungsmenge im Tangentialbündel explizit anzugeben, müßten wir das Differential in jedem Punkt ausrechnen, da sich Singularitäten nicht mehr so einfach wie in (V.3.4)' ausschließen lassen. Wir wollen darauf verzichten.

V.3.6)': Die Abb. mit Dehnung 2 sind nicht klassifiziert. Das Beispiel (V.3.2) zeigt, wie man schon bei Abb. von S^2 auf sich durch geeignete Wahl von h die Dehnungsmenge so verändern kann, daß sie einen anderen Homotopietyp hat als S^1.

V.3.7)': In diesem Fall ist die ganze Urbildsphäre Dehnungsmenge. Bei Standardeinhängung von $S^1 - g \to S^1; z \mapsto z^2$ ist $S^2 - (\pm e_3)$ Deh-

nungsmenge. $g \circ id|S^1_2$ hat $S^3-S^1_2$ als Dehnungsmenge. $id|S^1_1 \circ$ hat $S^3-S^1_1$ als Dehnungsmenge . Also ist die Dehnungsmeng von $g \circ g$ S^3.

(V.3.8)': Die Dehnungsmenge von f ist die Dehnungsmenge von S(g,h eine Groß-S^3_1. $S(g,h)(S^3_1)=S^2_1$. Nach (V.3.3)' ist das ganz Tangentialbündel von S^2_1 Bild der Dehnungsmenge von S(g, Wir wählen g so, daß S^1_1 Faser von g ist. (Man überlegt leicht, daß das keine Einschränkung der allgemeinen Sit tion ist.) $\pm e_3$ liegen in der Faser des Antipoden zu g(S Die einzigen Einheitstangentialvektoren aus TS^2_1 , die v g_* maximal gedehnt werden, werden von Großkreisen durch induziert. Sie bilden daher einen 2-Torus $\bar{T}$. Es ist kla daß das Bild $g_*(\bar{T})$ ein 2-Torus ist, der von $\bar{T}$ zweimal ü lagert wird. S^1_1 in S^3_1 sei das Urbild von e_3, S^1_2 in S^3_1 d von $-e_3$. Zu jedem Antpodenpaar $(q,-q) \in S^1_1$ gehört eine Gr die von den Meridianen von q nach -q durch S^1_2 gebildet Die Richtungen, die durch Großkreise auf S^2_q durch $\pm q$ in duziert sind, bilden einen Torus T^2_q , und $S(g,h)_*:T^2_q \to$ ist ebenfalls 2-fache Überlagerung. Es ist klar, daß di Dehnungsmenge von f Vereinigung aller T^2_q ist. Man kann so die Dehnungsmenge von f als ein T^2-BÜndel über $P^1\mathbb{R}=S$ betrachten. Die Verheftung ist so, daß ein triviales BÜ entsteht. Daher haben wir einen 3-Torus $S^1 \times S^1 \times S^1$ als Ei heitsdehnungsmenge. Das Bild ist ein 2-Torus, der von d T^2_q jeweils 4-mal überlagert wird.

(V.3.9)': Wie schon angedeutet,ist diese Abb. analog zu (V.2.2) behandeln. Sei $\cos^2(T)=a/a+b=2/3$. Als Dehnungsmenge er-

halten wir $\cos(T)S^1_1 \times \sin(T)S^1_2$. Das Bild ist der Äquator von S^2. Als Dehnungsmenge im Tangentialbündel erhält man ein (triviales) 1-dim. Bündel, dessen Bild das Tangentialbündel an den Bildäquator ist.

r wollen noch ein ganz allgemeines Problem vorstellen. M sei eine ffb. Untermfg. von S^m, N eine von S^n, f:M → N eine diffb. Abb.. nn läßt sich f zu einer Abb. F:S^m → S^n fortsetzen, die diff.b. ist t δ(F)=δ(f), Δ(F)=Δ(f) und TΔ(F)=TΔ(f)? Ist die Homotopieklasse n F eindeutig bestimmt?

.3.1o) $S^m_1 1$, $S^m_2 2$, $S^n_1 1$ und $S^n_2 2$ entstehen durch kan. Aufspaltung des $\mathbb{R}^{m_1+m_2+2}$ resp. $\mathbb{R}^{n_1+n_2+2}$. $f_1: S^m_1 1 \to S^n_1 1$ und $f_2: S^m_2 2 \to S^n_2 2$ seien differenzierbare Abb. mit Dehnung kleiner gleich drei. Definiere $f: S^m_1 1 \cup S^m_2 2 \to S^n_1 1 \cup S^n_2 2$ durch Vereinigung von f_1 und f_2. Dann ist eine Fortsetzung wie oben zu $f_1 * f_2$ homotop.

veis: Alle Kurven F(G(q,p)) lassen sich gleichzeitig in die Kurven $G(f_1(q), f_2(p))$ verkürzen.

3.12) f:$S^m_1 \to S^n_1$ sei eine C^1-differenzierbare surjektive Abbildung mit Dehnung zwei und f(q)=f(-q) für alle $q \in S^m_1$. Dann gilt für eine C^1-Fortsetzung F:$S^{m+k} \to S^{n+1}$ mit δ(f)=δ(F)und Δ(F)=Δ(f) und TΔ(F)=TΔ(f) folgendes:

<F>=o falls k≠1=2

<F>=o falls k>1=1

<F>=$\pm\Sigma$<f> falls k=1=1

<F>=? sonst

Beweis: Sei $r:S^{n+1}-S^n_1 \to S^{1-1}_2$ die starke Retraktion. Aus (II.4.1) f

$<F>=<f\circ(r\ F|S^{k-1}_2)>$ bekannt. Daher ist nur noch für den Fal

k=1=1 etwas zu zeigen. Wir nehmen $(r\circ F)(e_{m+2})=e_{n+2}$ an. Sei q aus

$U(-e_{m+2};\pi/2)$ und $F(q)\in U(e_{n+2};\pi/2)$. $F(q)\in S^n_1$ ist wegen der Vorausset

zung $f(q)=f(-q)$ und den Dehnungsbedingungen nicht möglich. (Ganz

analog folgt auch $F(U(e_{m+2};\pi/2))\subset U(e_{n+2};\pi/2)$.) Sei u der Schnittpu

von $G(e_{m+2},-e_{m+2};q)$ mit $S^m(e_{m+2})=S^m_1$ und T der Tangentialvektor, de

dieser Meridian in u induziert. Wegen (II.o.6) muß dieser Tangenti

vektor von $F_*|_u$ auf o abgebildet werden.Wenn er nicht auf null abg

bildet würde, könnte nur $F_*|_u(T)\in TS^n_1$ folgen. Das ergibt aber einen

Widerspruch zu $\delta(F)=2$. Also gibt es $s_1>s_2>o$, so daß $S^m_{\cos(s_1)}$ in di

πs_2-Umgebung von S^n_1 geschnitten mit $U(e_{n+2};\pi/2)$ unter F abgebildet

wird. Die Abb. $P:U(S^n_1;\pi s_2)\cap U(e_{n+2};\pi/2) \to S^n_{\cos(s_1)}$ ist kontrahierend

Daher hat die Abb. $P\circ F:S^m_{\cos(s_1)} \to S^n_{\cos(s_1)}$ Dehnung kleiner als 2.

Diese Abb. ist aber homotop zu f. Also folgt $<f>=o$. Wenn f nicht

nullhomotop ist, erhalten wir $(r\circ F)(-e_{m+2})=-e_{n+2}$. Durch Spiegelun

kann eine neue Klasse entstehen. Damit ist (V.3.12) bewiesen.

§ 4 Deformation einer Abbildung von S^5 nach S^3

Will man in der Definition von Q(p,n) das Intervall [o,π] durch
/2,π/2] ersetzen und sin und cos vertauschen, was für die Rech-
ng in reellen Koordinaten günstiger ist, muß man in der Definition
Suspension S(f,q,p,h) einer Abb. f Funktionen aus $C^1(-\pi/2,\pi/2;$
$,\pi/2)$ für h zulassen. A, B, C sollen immer Funktionen aus dieser
ge sein mit den zusätzlichen Eigenschaften, daß sie injektiv und
züglich des Fixpunktes o punktsymmetrisch sind. Wir betrachten das
ment $g\in H_2^3(2)$, das wir in verschiedenen Koordinaten hinschreiben:

$$^3 \to S^2;(z_1,z_2) \to (2z_1\bar{z}_2,\ z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1)$$
$$,x_2,x_3,x_4) \to (2(x_1x_3+x_2x_4),\ 2(x_2x_3-x_1x_4),\ x_3^2+x_4^2-x_1^2-x_2^2)$$

sen wir g auf als Abb. von S_1^3 in S^4 nach S_1^2 in S^3, so ist

$$,e_5,e_4,C):S^4 \to S^3;\ (x_1,..,x_4,x_5) \to \left(\frac{\sqrt{1-\tilde{C}^2(x_5)}}{1-x_5^2}\cdot g(x_1,..,x_4),\ \tilde{C}(x_5)\right)$$

sen wir aber g auf als Abb. von S_2^3 in S^5 nach S_2^2 in S^4, können wir
unächst in e_2 und dann in e_1 einhängen. Wir erhalten die Abbildung:

$$(g,e_2,e_2,B),e_1,e_1,A):S^5 \to S^3;\ (x_1,x_2,x_3,..,x_6) \to (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=$$
$$x_1),\sqrt{1-\tilde{A}^2(x_1)}\tilde{B}(x_2/\sqrt{1-x_1^2}),\ 1/(1-x_1^2-x_2^2)\sqrt{1-\tilde{A}^2(x_1)}\sqrt{1-\tilde{B}^2(x_2/\sqrt{1-x_1^2})}\cdot g(x_3,..,x_6)$$

ei ist $\tilde{C}=\sin(C(\arcsin))$; $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ analog definiert. Wir kürzen
$,e_5,e_4,C)$ durch S(g) und $S(S(g,e_2,e_2,B),e_1,e_1,A)$ durch $S^2(g)$ ab.

ist $f=S(g)\circ S^2(g):S^5 \to S^3$ $;(x_1,..,x_6) \to (y_1,..,y_5) \to (z_1,..,z_4)$
e nichtnullhomotope Abbildung. Sie ist eine Faserung mit drei Aus-

nahmefasern. Eine reguläre Faser ist ein Torus. Sei S^1_m der Großkre der durch die 3. und 4. Koordinate in $\mathbb{R}^6$ definiert ist. Dann gilt: $S(g)(S^1_m)=-e_5$ und $S^2(g)(S^1_2)=e_5$. $S(g)^{-1}(-e_3)=S^1_1$ in $\mathbb{R}^5$ und $S^2(g)^{-1}$ $=S^1_1$. Daher haben wir drei Großkreise als Ausnahmefasern. Sie habe den maximal möglichen Abstand $\pi/2$ von einander. Diese ausgezeichne Konstellation der Ausnahmefasern soll bei der Variation von A, B, erhalten bleiben. Wir variieren also nur über solche Abbildungen, die Bedingungen wie A erfüllen. Daß man leicht A und B so wählen kann, daß die Dehnungsmenge von $S^2(g)$ S^3_2 ist, wissen wir aus (V.3. $S^2(g)(S^3_2)=S^2_2$. Die Dehnungsmenge von S(g) sei nach geeigneter Wahl von C S^3_1 . $S^3_1 \cap S^2_2=S^1_m$ aber ist eine Faser von S(g). Daher lassen sic A, B, C so wählen, daß $\bar{\delta}(f)<4$ ist. Für die Rechnung führen wir Pol koordinaten ein. Punkte, an denen nicht alle Koordinaten eindeutig definiert sind, lassen wir außer Betracht, da wir das Differential ohnehin nur auf einem endlichen Gitter berechnen.

Sei $-\pi/2\leq r_i\leq\pi/2$, $1\leq i\leq 4$ und $0\leq r_5\leq 2\pi$.

$x_1=\sin(r_1)$

$x_2=\cos(r_1)\sin(r_2)$

$x_3=\cos(r_1)\cos(r_2)\cos(r_3)\cos(r_4)\cos(r_5)$

$x_4=\cos(r_1)\cos(r_2)\cos(r_3)\cos(r_4)\sin(r_5)$

$x_5=\cos(r_1)\cos(r_2)\sin(r_3)$

$x_6=\cos(r_1)\cos(r_2)\cos(r_3)\sin(r_4)$

Durch diese Koordinaten ergeben sich 5 orthogonale Tangentialvekt ren TX_i der Länge L_i, die nach Division durch L_i eine ON-Basis vo T_xS^5 bilden. $L_1=1$, $L_2=\cos(r_1)$, $L_3=\cos(r_1)\cos(r_2)$, $L_4=\cos(r_1)\cos(r_2)\cos(r_3)$ und $L_5=\cos(r_1)\cos(r_2)\cos(r_3)\cos(r_4)$.

Diese ON-Basis ist $TX_1, \ldots, TX_5$. Wir wollen $f_*|_x(TX_i)$ berechnen. Dazu führen wir einige Abkürzungen ein, deren Bezeichnung im Pro - gramm etwas verschieden ist.

$( )_1 = \tilde{A}(\sin(r_1))$

$( )_2 = \sqrt{1-\tilde{A}^2(\sin(r_1))}$

$( )_3 = \tilde{B}(\sin(r_2))$

$( )_4 = \sqrt{1-\tilde{B}^2(\sin(r_2))}$

$( )_5 = \cos(r_3)\cos(r_4)\cos(r_5)\sin(r_3)+\cos^2(r_3)\cos(r_4)\sin(r_5)\sin(r_4)$

$( )_6 = \cos(r_3)\cos(r_4)\sin(r_5)\sin(r_3)+\cos^2(r_3)\cos(r_4)\cos(r_5)\sin(r_4)$

$( )_7 = 1-2\cos^2(r_3)\cos^2(r_4)$

$y_1 = ( )_1$, $y_2 = ( )_2( )_3$, $y_3 = 2( )_2( )_4( )_5$, $y_4 = 2( )_2( )_4( )_5$ und $y_5 = ( )_2( )_4( )_7$.

$\partial( )_1/\partial r_1 = \tilde{A}'(\sin(r_1))\cos(r_1)$ und $\partial( )_1/\partial r_i = o$ für $2 \leq i \leq 5$

$\partial( )_2/\partial r_2 = (-\tilde{A}(\sin(r_1))\tilde{A}'(\sin(r_1))\cos(r_1))/( )_2$; $\partial( )_2/\partial r_1 = o$ sonst

$\partial( )_3/\partial r_2 = \tilde{B}'(\sin(r_2))\cos(r_2)$ und $\partial( )_3/\partial r_i = o$ für $i \neq 2$

$\partial( )_4/\partial r_2 = (-\tilde{B}(\sin(r_2))\tilde{B}'(\sin(r_2))\cos(r_2))/( )_4$; $\partial( )_4/\partial r_i = o$ sonst

$\partial( )_5/\partial r_j = ( )_6/ r_j = ( )_7/ r_j = o$ für $j = 1,2$; $\partial( )_7/\partial r_5 = o$

$\partial( )_5/\partial r_3 = \cos(r_4)\cos(r_5)(\cos^2(r_3)-\sin^2(r_3))-2\cos(r_3)\sin(r_3)\cos(r_4)..$
$.. \sin(r_4)\sin(r_5)$

$\partial( )_5/\partial r_4 = -\cos(r_3)\sin(r_3)\cos(r_5)\sin(r_4)+\cos^2(r_3)\sin(r_5)(\cos^2(r_4)- ..$

$\partial( )_5/\partial r_5 = -( )_6$ $.. \sin^2(r_4))$

$\partial( )_6/\partial r_3 = \cos(r_4)\sin(r_5)(\cos^2(r_3)-\sin^2(r_3))+2\cos(r_3)\sin(r_3)\cos(r_4)..$
$.. \cos(r_5)\sin(r_4)$

$\partial( )_6/\partial r_4 = -\cos(r_3)\sin(r_3)\sin(r_5)\sin(r_4)-\cos^2(r_3)\cos(r_5)(\cos^2(r_4)- ..$

$\partial( )_6/\partial r_5 = ( )_5$ $.. \sin^2(r_4))$

$\partial(\ )_7/\partial r_3 = 4\cos(r_3)\sin(r_3)\cos^2(r_4)$

$\partial(\ )_7/\partial r_4 = 4\cos(r_4)\sin(r_4)\cos^2(r_3)$

$f(x_1,..,x_6) = S(g)(y_1,..,y_5) = (z_1,..,z_4)$. Daher ist $f_*|_x(TX_i) = \frac{1}{L_i}(\partial z/$
Da wir angegeben haben, wie man z_j aus den y_i berechnet und $\partial y_k/\partial$
bekannt ist, haben wir $f_*|_x$ bestimmt. Es bleibt die Norm von $f_*|_x$
berechnen.

Man sucht den längsten Vektor BX_{j_1} der Bildvektoren $BX_j = (\partial z/\partial r_j)$
und subtrahiert von den übrigen Vektoren deren Komponente in BX_{j_1}
Richtung. Die 4 neuen Vektoren BU_i haben die Urbilder TU_i. Wieder
suchen wir den längsten Vektor BU_{j_2} aus und orthogonalisieren mit
Hilfe von BU_{j_2}. TV_k seien die Urbilder der 3 neuen Vektoren BV_k.
neutes Auswählen von BV_{j_3} liefert nach dem Orthogonalisieren zwei
Tangentialvektoren TW_1 und TW_2 aus dem Kern von $f_*|_x$, die wir zu
einer ON-Basis des Kernes Y_1, Y_2 verändern. Anschließend orthogon
sieren wir Y_1, Y_2, TX_{j_1}, TU_{j_2}, TV_{j_3} zu einer ON-Basis Y_1,Y_2,X_1,X_2
von T_xS^5. Dabei sind $\|f_*|_x(X_i)\|$ und $\langle f_*|_x(X_i), f_*|_x(X_j)\rangle$, $1\le i,j\le 3$,
ebenfalls berechnet worden. Sei nun $o<s<\pi$ und $-\pi/2<t<\pi/2$ und
$V = \sin(t)X_1 + \cos(t)(\cos(s)X_2 + \sin(s)X_3)$. Zur Abkürzung setzen wir no
$\|f_*|_x(X_1)\|^2 = a$, $b(s) = \|f_*|_x(\cos(s)X_2 + \sin(s)X_3)\|^2$ und $c(s) = \langle f_*|_x(X_1$
$f_*|_x(\cos(s)X_2 + \sin(s)X_3)\rangle$. Dann ist $\|f_*|_x(V)\|^2 = \sin^2(t)a + \cos^2(t)b(s)$
$2\sin(t)\cos(t)c(s)$ für $\tan(2t) = (2c(s))/(b(s)-a)$ extremal. Nun lass
wir x durch Variieren der r_i auf einem Gitter wandern, und auch
durchläuft für jedes x eine diskrete Menge. Wir haben verschiede
A,B,C ausprobiert. Es ist klar, daß in der Nähe der Äquatoren die
gungen von A,B,C nicht größer als 1.5 sein dürfen, wenn man eine
mit Dehnung kleiner gleich drei konstruieren will. Doch erhielten
in den Fällen, wo die Steigung deutlich unter 1.5 lag (z.B 1.45 o

maximale Werte über 3 (3.o4 oder 3.1) und sogar bei einem recht groben Gitter auf S^5. Daher vermuten wir, mit dieser Methode nicht unter 3 die Dehnung drücken zu können. Um drei zu realisieren, haben wir schließlich A=B=C gesetzt, wobei A punktsymmetrisch ist, A(t) für $t\in[o,\pi/4]$ auf der Geraden mit Steigung 1.5 und für $t\in[\pi/4,\pi/2]$ auf der Geraden durch $1.5\cdot\pi/4$ und $\pi/2$ liegt. Das Programm berechnete bei einem groben Gitter auf S^5 als maximalen Wert: 2.9969

Eine untere Schranke für diese Methode ergibt sich sofort, wenn man beachtet, daß die beiden 3-Sphären $\cos(\pi/4)e_1+\sin(\pi/4)S^3_2$ und $\cos(\pi/4)e_5+\sin(\pi/4)S^3_1$ in S^4 Punkte gemeinsam haben, wo die Tangentialräume übereinstimmen. Die Dehnung muß größer gleich der folgenden Zahl sein, die wir schon in (9) bei der Konstruktion von Abb. der S^2 auf sich mit Grad 4 und möglichst kleiner Dehnung ausgerechnet haben (bis auf 3 Stellen genau.)

$$2.5648 \approx \min\{2s \mid 1 \leq s \leq 2 \text{ und } \frac{4\cos(s\pi/4)}{\cos(\pi/4s)} \leq 2s\}$$

Zum Glück können wir aber beweisen, daß $\delta<S(g)\circ S^2(g)> \neq 3$ ist. Denn sei $B:S^1 \times S^3 \to S^2$ die Komposition der folgenden Abbildungen:

$$G:S^1 \times S^3 \to S^1 \times S^2 \qquad H:S^1 \times S^2 \to S^2$$

$$(z;z_1,z_2)\mapsto(z;g(z_1,z_2)) \qquad (z;(z',t))\mapsto(z\bar{z}';t)$$

Dann ist die Hopfkonstruktion von B Komposition von den Abbildungen $id(S^1)*g:S^1*S^3 \to S^1*S^2$ und der Hopfkonstruktion von H. $id(S^1)*g$ ist homotop zu S^2g. Schränkt man H auf $S^1 \times S^1_1$ ein und macht dann Hopfkonstruktion, erhält man gerade g. Also ist die Hopfkonstruktion von H homotop zu S(g). Jetzt sieht man sofort, daß B für festes $z\in S^1$ Dehnung zwei hat, für festes $x\in S^3$ höchstens Dehnung 1 hat. Nach

(II.o.5) hat die Hopfkonstruktion (bei geeigneter Wahl eines Elemen
tes aus $C^1(o,o;\pi/2,\pi)$) Dehnung kleiner gleich drei.

Vermutung: Jede nichtnullhomotope Abbildung von S^5 nach S^3 hat Deh
nung größer gleich drei.

Wir wollen mit der Beobachtung schließen, daß der in (9) als obere
Schranke für d(2,3) errechnete Wert: 2.3lo7 auffällig nahe an $4/\sqrt{3}$
liegt. Es wäre schön einen Wert für ein d(k,n) zu kennen (k>2,n≥2)
der nicht 2 ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1) BAUM,P.F. Quadratic maps and stable homotopy groups
Illin. Jour. Math. 11 (1967); 586 - 595

[2) BIER,Th. Geometrische Beiträge zur Homotopietheorie: Gerahmte Mannigfaltigkeiten, normierte und nichtsinguläre Bilinearformen
Uni. Göttingen, Dissertation (1979)

[3) BOREL,A. SERRE,J.-P. Groupes de Lie et puissances reduite de Steenrod
Am. J. Math. 75 (1953); 4o9 - 448

[4) CONNER,P.E. FLOYD,E.E. Differentiable periodic maps
Springer (1964)

[5) ECKMANN,B. Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen
Comm. Math. Helv. 15 (1942-43); 358 - 366

[6) FEDERER,H. Geometric measure theory
Springer (1969)

[7) GILBARG,D. TRUDINGER,N.S. Elliptic Partial Differential Equations of second order
Springer (1977)

8) HALMOS,P.R. Measure Theory
Springer (1974)

9) HEFTER,H. Dehnungsuntersuchungen an Sphärenabbildungen
Bonn, Diplomarbeit (1976)

1o) HSU,A. The stretch of a differentiable map of riemannian manifolds
New York, Syracuse University, Dissert. (1972)

(11) HSU,A. — A characterization of the Hopf map by str
Math. Zeitsch. 129 (1972); 195 - 2o6

(12) HU,S.T. — Homotopy theory
New York, Acad. Press (1959)

(13) JAMES,I.M. — Filtration of the homotopy groups of sphe
Quart. J. Math. Oxford (2), 9 (1958);3o1-

(14) KERVAIRE,M.
MILNOR,J. — Homotopy spheres I
Ann. of Math. 77 (1963); 512

(15) LAM,K.Y. — Some interesting examples of nonsingular
bilinear maps
Topology 16 (1977); 185 - 188

(16) LAWSON,H.B. — Stretching phenomena in mappings of sphe
Proc. Am. Math. Soc. 19,1 (1968); 433 - 4

(17) MAHOWALD,M. — On the order of the image of J
Topology 6 (1967); 371 - 378

(18) OLIVIER,R. — Über die Dehnung von Sphärenabbildungen
Inv. math. 1 (1966); 38o - 39o

(19) RADEMACHER,H. — Differenzierbarkeit Lipschitz-stetiger A
Math. Ann. 79 (1919); 34o - 359

(2o) RESHETNYAK,Y.G. — Space mappings with bounded distorsion
Sib. Math. Jour. 8,3 (1967); 466 - 487

(21) " — Index Boundedness Condition for mappings
with Bounded Distorsion
Sib. Math. Jour. 9,2 (1968); 281 - 285

(22) ROITBERG,J. — Dilatation phenomena in the homotopy of
Advances of Math. 15 (1975); 198 - 2o6

(23) ROITBERG,J. The dilatation and filtration invariant in the homotopy of spheres
Advances of Math. 2o (1976); 28o - 284

(24) WHITEHEAD,J.H.C. An expression of Hopf s invariant as an integral
Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33 (1947); 117 - 123

(25) WHITNEY,H. Geometric integration theory
Princeton Uni. Press (1957)

(26) WOOD,R. Polynomial maps from spheres to spheres
Inv. math. 5 (1968); 163 - 168

(27) YANG,Ch.T. On maps from spheres to euclidian spaces
Am. J. Math. 79 (1957); 725 - 732

(28) ZINDLER,K. Über konvexe Gebilde I
Monatsh. Math. u. Phys. Bd. 3o (192o);87-1o2

```
0001                REAL IX(6,5),BX(4,5),TU(6,5),BU(4,5),TV(4,5),BV(4,5),Z(5)
0002               2EAL D10,D11,D12,Y6,Y7,Y8,TD2,TD1,A,DA,B,DB,C,DC,H1,H2,H3,H4,H5,H6
0003               REAL D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8,D9,T303,T403,T304,T404,Y1,Y2,Y3,Y4,Y5
0004               INTEGER I,J,K,L,M,N,I1,I2,I3,I4,I5,I6,J1,J2,J3,J4,J5,J6,K1
0005               REAL SK(5),SK1(5),SK2(5),SK3(5),LN1,LN2,LN3
0006               REAL Y(6,5),TW(6,5),BW(4,5)
0007               REAL E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E10,S1,S2,S,T,T1,T2,E,EE,AA,BB,CC
0008               REAL C(6,5)
0009               REAL ZZZ(15)
                C
                C     EINLESEN DER KNICKPUNKTE VON A,B,C
                C
0010                READ(5,100)AX,AY,BN,BY,CX,CY
0011             100 FORMAT(6F10.5)
0012                PP=ARCOS(0.0)
0013                BN=PP/2
0014                AY=PP/2
0015                 CX=PP/2
0016                AY=1.5*AX
0017                BY=1.5*AX
0018                CY=1.5*AX
0019                WRITE(6,200)AX,AY,BN,BY,CX,CY
0020             200 FORMAT('0','A',2F10.5,' B ',2F10.5,' C ',2F10.5)
                C
                C     ITERIEREN AUF DER S5
                C
0021                PP=ARCOS(0.0)
0022                R1=-PP+0.7
0023                DO 1 I1=1,9
0024                R1=R1+0.09
0025                R2=-PP+0.7
0026                DO 2 I2=1,6
0027                 R2=R2+0.13
0028                R3=-PP
0029                DO 3 I3=1,6
0030                R3=R3+0.25
0031                R4=-PP
0032                DO 4 I4=1,6
0033                R4=R4+0.25
0034                R5=0.0
0035                DO 5 I5=1,15
0036                R5=R5+0.4
                C
                C     BERECHNUNG DER DW-BASIS TX1,   ,TX5
                C
0037                H1=SIN(R1)
0038                H2=SIN(R2)
0039                H3=SIN(R3)
0040                H4=SIN(R4)
0041                H5=SIN(R5)
                C
0042                TX(1,5)=0
0043                TX(2,5)=0
0044                TX(3,5)=-H5
0045                TX(4,5)=COS(R5)
0046                TX(5,5)=0
0047                TX(6,5)=0
                C
```

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

```
0048                    TX(1,4)=0
0049                    TX(2,4)=0
0050                    TX(3,4)=-H4*TX(4,5)
0051                    TX(4,4)=-H4*H5
0052                    TX(5,4)=0
0053                    TX(6,4)=COS(R4)
                C
0054                    H6=TX(6,4)*TX(4,5)
0055                    H7=TX(6,4)*H5
                C
0056                    TX(1,3)=0
0057                    TX(2,3)=0
0058                    TX(3,3)=-H3*H6
0059                    TX(4,3)=-H3*H7
0060                    TX(5,3)=COS(R3)
0061                    TX(6,3)=-H3*H6
                C
0062                    H8=TX(5,3)*H6
0063                    H9=TX(5,3)*H7
                C
0064                    TX(1,2)=0
0065                    TX(2,2)=COS(R2)
0066                    TX(3,2)=-H2*H8
0067                    TX(4,2)=-H2*H9
0068                    TX(5,2)=-H2*H3
0069                    TX(6,2)=-H2*TX(5,3)*H4
                C
0070                    H10 =TX(2,2)*H8
0071                    H11 =TX(2,2)*H9
                C
0072                    TX(1,1)=COS(R1)
0073                    TX(2,1)=-H1*H2
0074                    TX(3,1)=-H1*H10
0075                    TX(4,1)=-H1*H11
0076                    TX(5,1)=-H1*TX(2,2)*H3
0077                    TX(6,1)=-H1*TX(2,2)*TX(5,3)*H4
                C
0078                    Z(1)=1
0079                    Z(2)=TX(1,1)
0080                    Z(3)=Z(2)*TX(2,2)
0081                    Z(4)=Z(3)*TX(5,3)
0082                    Z(5)=Z(4)*TX(6,4)
                C
                C       BERECHNUNG VON Y1,   ,Y5
                C
0083                    CALL KNICK(H1,AX,AY,A,DA)
0084                    CALL KNICK(H2,BX,BY,B,DB)
                C
0085                    D1=SQRT(1-A*A)
0086                    TD1=-A*DA*TX(1,1)/D1
0087                    D2=SQRT(1-B*B)
0088                    TD2=-B*DB*TX(2,2)/D2
0089                    D6=D1*D2
0090                    D3=2*(H5*H3*H9*H4*TX(5,3))
0091                    D4=2*(H2*H11-H8*H4*TX(5,3))
0092                    D5=(1-2*(TX(5,3)*TX(6,4))**2)
0093                    T3D=-2*(H6*(TX(5,3)*TX(5,3)-H3*H3)*2*H7*TX(6,3))
0094                    T4D=-2*(TX(4,3)*TX(3,3)*TX(4,5)+TX(5,3)*TX(5,3)*H4*(TX(6,4)+TX(6,4
```

```
                *)-H4*H4))
0095                 T3D4=2*(H7*(TX(5,3)*TX(5,3)-H3*H3)-2*H8*(X(6,3))
0096                 T4D4=2*(TX(6,3)*TX(5,3)*H5-TX(5,3)*TX(5,3)*TX(4,5)*(TX(6,4)*TX(6,4
                *)-H4*H4))
                C
0097                 Y1=A
0098                 Y2=D1*B
0099                 Y3=D6*D3
0100                 Y4=D6*D4
0101                 Y5=D6*D5
0102                 CALL KNICK(Y5,CX,CY,C,DC)
0103                 D7=C
0104                 D8=SQRT(1-D7*D7)
0105                 D9=D8/(1-Y5*Y5)
0106                 D10=2*(Y1*Y3+Y2*Y4)
0107                 D11=2*(Y2*Y3-Y1*Y4)
0108                 D12=Y3*Y3+Y4*Y4-Y1*Y1-Y2*Y2
                C
                C    BERECHNUNG VON BX1,   ,BX5
                C
0109                 N=0
0110              11 DY1=DA*TX(1,1)
0111                 DY2=TD1*B
0112                 DY3=TD1*D2*D3
0113                 DY4=TD1*D2*D4
0114                 DY5=TD1*D2*D5
0115                 GO TO 16
0116              12 DY1=0
0117                 DY2=D1*D8*TX(2,2)
0118                 DY3=D1*TD2*D3
0119                 DY4=D1*TD2*D4
0120                 DY5=D1*TD2*D5
0121                 GO TO 16
0122              13 DY1=0
0123                 DY2=0
0124                 DY3=D6*T3D3
0125                 DY4=D6*T3D4
0126                 DY5=D6*4*TX(6,4)*TX(6,4)*H3*TX(5,3)
0127                 GO TO 16
0128              14 DY1=0
0129                 DY2=0
0130                 DY3=D6*T4D3
0131                 DY4=D6*T4D4
0132                 DY5=D6*4*TX(5,3)*TX(5,3)*H4*TX(6,4)
0133                 GO TO 16
0134              15 DY1=0
0135                 DY2=0
0136                 DY3=-Y4
0137                 DY4=Y3
0138                 DY5=0
0139              16 N=N+1
0140                 DD7=DC*DY5
0141                 DD8=-D7*DD7/D8
0142                 DD9=(D10*(1-Y5*Y5)+D11*2*Y5*DY5)/(1-Y5*Y5)**2
0143                 Y6=2*(DY1*Y3+Y1*DY3+DY2*Y4+Y2*DY4)
0144                 Y7=2*(DY2*Y3+Y2*DY3-DY1*Y4-Y1*DY4)
0145                 Y8=2*(DY3*Y3+DY4*Y4-DY1*Y1-DY2*Y2)
                C
```

```
0146                  BX(L,N)=(D09*D10+D99*Y6)/Z(N)
0147                  BX(2,N)=(D03*D11+D99*Y7)/Z(N)
0148                  BX(3,N)=(D09*D12+D99*Y8)/Z(N)
0149                  BX(4,N)=D07/Z(N)
0150                  IF(N.EQ.1)GOTO 12
0151                  IF(N.EQ.2)GOTO13
0152                  IF(N.EQ.3)GOTO14
0153                  IF(N.EQ.4)GOTO15
                C
                C     BERECHNUNG DES KERNES
                C
0154                  LN1=0
0155                  LN2=0
0156                  LN3=0
0157                  J4=4
0158                  J5=5
0159                  J6=6
0160                  DO 21 N=1,5
0161                  CALL NORM(BX,J4,N,T)
0162                  IF(LN1.GE.1)GO TO 21
0163                  LN1=T
0164                  J1=N
0165               21 CONTINUE
0166                  DO 22 N=1,5
0167                   CALL SKP(BX,BX,J4,N,J1,SK1(N))
0168                  DO 23 M=1,6
0169               23 TU(M,N)=TX(M,N)-SK1(N)/(LN1*LN1)*TX(M,J1)
0170                  DO 24 M=1,4
0171               24 BU(M,N)=BX(M,N)-SK1(N)/(LN1*LN1)*BX(M,J1)
0172               22 CONTINUE
                C
0173                  DO 31 N=1,5
0174                  CALL NORM(BU,J4,N,T)
0175                  IF(LN2.GE.1)GO TO 31
0176                  LN2=T
0177                  J2=N
0178               31 CONTINUE
0179                  DO 32 N=1,5
0180                  CALL SKP(BU,BU,J4,N,J2,SK2(N))
0181                  DO 33 M=1,6
0182               33 TV(M,N)=TU(M,N)-SK2(N)/(LN2*LN2)*TU(M,J2)
0183                  DO 34 M=1,4
0184               34 BV(M,N)=BU(M,N)-SK2(N)/(LN2*LN2)*BU(M,J2)
0185               32 CONTINUE
                C
0186                  DO 41 N=1,5
0187                  CALL NORM(BV,J4,N,T)
0188                  IF(LN3.GE.1)GOTO41
0189                  LN3=T
0190                  J3=N
0191               41 CONTINUE
0192                  DO 42 N=1,5
0193                  CALL SKP(BV,BV,J4,N,SK3(N))
0194                  DO 43 M=1,6
0195               43 TW(M,N)=TV(M,N)-SK3(N)/(LN3*LN3)*TV(M,J3)
0196               42 CONTINUE
0197                  M=0
0198                  DO 51 N=1,5
```

PHRZ (RAVENSHÄT BORN)

```
0199                  IF(N.EQ.J1)GOTO51
0200                  IF(N.EQ.J2)GOTO51
0201                  IF(M.EQ.J3)GOTO51
0202                  IF(M.EQ.1)GOTO52
0203                  DO 53 L=1,6
0204               53 Y(L,1)=TW(L,N)
0205                  M=M+1
0206                  GO TO 51
0207               52 DO 54 L=1,6
0208               54 Y(L,2)=TW(L,N)
0209               51 CONTINUE
                   C
                   C     ON-BASIS DES KERNES
                   C
0210                  M=1
0211                  N=2
0212                  CALL NORM(Y,J6,M,S)
0213                  DO 61 L=1,6
0214               61 Y(L,1)=Y(L,1)/S
0215                  CALL SKP(Y,Y,J6,M,M,S)
0216                  DO 62 L=1,6
0217               62 Y(L,2)=Y(L,2)-S*Y(L,1)
0218                  CALL NORM(Y,J6,N,S)
0219                  DO 63 L=1,6
0220               63 Y(L,2)=Y(L,2)/S
                   C
                   C     VEKTOREN ORTHOGONAL ZUM KERN
                   C
0221                  CALL SKP(TX,Y,J6,J1,M,T1)
0222                  CALL SKP(TX,Y,J6,J1,N,T2)
0223                  DO 71 L=1,6
0224               71 X(L,1)=TX(L,J1)-T1*Y(L,1)-T2*Y(L,2)
0225                  CALL NORM(X,J6,M,S)
0226                  E1=1/S
0227                  DO 72 L=1,6
0228               72 X(L,1)=X(L,1)*E1
0229                  AA=E1*LN1
0230                  AA=AA*AA
0231                  CALL SKP(TU,X,J6,J2,M,T3)
0232                  CALL SKP(TU,Y,J6,J2,M,T1)
0233                  CALL SKP(TU,Y,J6,J2,N,T2)
0234                  DO 81 L=1,6
0235               81 X(L,2)=TU(L,J2)-T3*X(L,1)-T2*Y(L,2)-T1*Y(L,1)
0236                  CALL NORM(X,J6,N,S)
0237                  E2=1/S
0238                  DO 82 L=1,6
0239               82 X(L,2)=X(L,2)*E2
0240                  E3=T3*E1*LN1
0241                  BB=E2*SQRT(LN2*LN2+E3*E3)
0242                  BB=BB*BB
                   C
0243                  CALL SKP(TV,X,J6,J3,M,S1)
0244                  CALL SKP(TV,X,J6,J3,N,S2)
0245                  CALL SKP(TV,Y,J6,J3,M,T1)
0246                  CALL SKP(TV,Y,J6,J3,N,T2)
0247                  DO 91 L=1,6
0248               91 X(L,3)=FV(L,J3)-S1*X(L,1)-S2*X(L,2)-T1*Y(L,1)-T2*Y(L,2)
0249                  CALL NORM(X,J6,J5,S)
```

RHRZ UNIVERSITÄT BONN

```
0250                E4=1/S
0251                E5=S2*S2*LN2
0252                E6=S2*(2*E3*(1-S)+E)
0253                CC=E4*SQRT(LN1*LN3+E5*E5+E4*E6*LN1*LN1)
0254                CC=CC*CC
0255                DD=-E2*E3*(E1*LN1)**2
0256                EE=E4*E6*LN1*LN1*E1
0257                FF=-S2*E4*LN2*E5-E2*E3*E4*E1*E6*LN1*LN1
                C
                C     DIE ITERATION IM TANGENTIALRAUM
                C
0258                P=2*ARCOS(0.0)
0259                S=0.0
0260                E=P/25
0261                D=0
0262                DO 201 N=1,25
0263                S=S+E
0264                E7=COS(S)
0265                E8=SIN(S)
0266                BCD=E7*E7*BB+E8*E8*CC+2*E7*E8*FF
0267                EE=E7*DD+E8*EE
0268                T=ATAN(2*EE/(BCD-AA))/2
0269                E9=SIN(T)
0270                E10=COS(T)
0271                D1=(E9*E9*AA+E10*E10*BCD+2*E9*E10*EE)**2
0272                D1=SQRT(SQRT(D1))
0273                IF(T.GT.0)GO TO 77
0274                E9=SIN(T+P/2)
0275                E10=COS(T+P/2)
0276                D2=(E9*E9*AA+E10*E10*BCD+2*E9*E10*EE)**2
0277                D2=SQRT(SQRT(D2))
0278                GO TO 88
0279             77 E9=SIN(T-P/2)
0280                E10=COS(T-P/2)
0281                D2=(E9*E9*AA+E10*E10*BCD+2*E9*E10*EE)**2
0282                D2=SQRT(SQRT(D2))
0283             88 CONTINUE
0284            201 CONTINUE
0285                AA=SQRT(AA)
0286                D=AMAX1(AA,0.,D1,D2)
0287            201 CONTINUE
0288                ZZZ(15)=0
0289              5 CONTINUE
0290                WRITE(6,300)ZZZ
0291            300 FORMAT(' ',15E7.4)
0292              4 CONTINUE
0293              3 CONTINUE
0294              2 CONTINUE
0295              1 CONTINUE
0296                STOP
0297                END
```

```
0001                SUBROUTINE KNICK(T,XO,YO,FT,DFT)
0002                REAL T,XO,YO,FT,DFT
0003                P=ARCOS(0.0)
0004                Z=T
0005                T=ARSIN(T)
0006                S=(P-YO)/(P-XO)
0007                U=-XO
                C
0008                IF(T.LT.U)GO TO 2
0009                IF(T.GT.XO)GO TO 1
0010                B=(YO/XO)*T
0011                FT=SIN(B)
0012                DFT=COS(B)*(YO/XO)*(1/COS(T))
0013                GO TO 3
0014              1 B=S*(T-XO)+YO
0015                FT=SIN(B)
0016                DFT=COS(B)*S*(1/COS(T))
0017                GO TO 3
0018              2 B=S*(T+XO)-YO
0019                FT=SIN(B)
0020                DFT=COS(B)*S/COS(T)
0021                T=Z
0022              3 CONTINUE
0023                T=Z
0024                RETURN
0025                END
```

```
0001                SUBROUTINE NORM(A,J,I,S)
0002                REAL A(5,5),S
0003                R=0.0
0004                DO 1 K=I,J
0005              1 R=R+A(K,I)**2
0006                S=SQRT(R)
0007                RETURN
0008                END
```

RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM

```
0001                  SUBROUTINE SKP(A,B,J,I,K,T)
0002                  REAL A(J,5),B(J,5),T
0003                  R=0.0
0004                  DO 1 L=I,J
0005                1 R=R+A(L,I)*B(L,K)
0006                  T=R
0007                  RETURN
0008                  END
```

A	0.78540	1.17810	B	0.78540	1.17810	C	0.78540	1.17810
1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985	1.2985
1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060	1.5060
1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414	1.5414
1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840	1.5840
1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170	1.6170
1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676
1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144	1.3144
1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067	1.6067
1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775	1.6775
1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423	1.7423
1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904	1.7904
1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149	1.8149
1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334	1.3334
1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659	1.6659
1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204	1.8204
1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994	1.8994
1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436	1.9436
1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238	1.9238
1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508	1.3508
1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449
1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131	1.9131
1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384	1.9384
1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338	1.9338
1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017
1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617	1.3617
1.7762	1.7762	1.7962	1.7962	1.7962	1.7762	1.7762	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962	1.7962
1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531	1.9531
1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133	1.9133
1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145	1.8145
1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093	1.6093
1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676	1.3676
1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169	1.8169
1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224	1.9224
1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762	1.8762
1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486	1.6486
1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022	1.3022
1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756	1.5756
1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854
1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449	1.7449
1.7726	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926	1.7926
1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6359	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355
1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417
1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854	1.5854
1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173	1.8173
1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158	1.9158
1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835	1.9835
2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439	2.0439
2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763	2.0763
1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031	1.6031
1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033	1.9033
2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836	2.0836
2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689	2.1689
2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993	2.1993
2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099	2.2099
1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210	1.6210
1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771	1.9771
2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883
2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263	2.2263
2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756	2.1756
2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422	2.1422
1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355	1.6355
2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567	2.0567
2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967	2.1967

BURZ UNIVERSITÄT BOCHUM

2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866	2.1866
2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133	2.0133
1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306	1.9306
1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417	1.6417
2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800	2.0800
2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089	2.2089
2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459	2.1459
1.8713	1.8712	1.8712	1.8712	1.8713	1.8712	1.8712	1.8712	1.8713	1.8713	1.8712	1.8713	1.8713	1.8713	1.8713	1.8712
1.5741	1.5941	1.5941	1.5741	1.5741	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941	1.5941
1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672	1.7672
1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004	1.9004
1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451	1.9451
1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572	1.9572
1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830	1.9830
1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987	1.9987
1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032	1.8032
1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951
2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342	2.1342
2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075	2.2075
2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771	2.2771
2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153	2.3153
1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450	1.8450
2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202	2.1202
2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252	2.3252
2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217	2.4217
2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694	2.4694
2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826	2.4826
1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604	1.9604
2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256	2.2256
2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475	2.4475
2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967	2.4967
2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380	2.4380
2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013	2.4013
1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884	1.9884
2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935	2.2935
2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687	2.4687
2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451	2.4451
2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437	2.2437
2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505	2.1505
2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007	2.0007
2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3199	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198	2.3198
2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822	2.4822
2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960	2.3960
2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821	2.0821
1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069	1.8069
2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245	2.0245
2.0566	2.0567	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566	2.0567	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566	2.0566
2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042	2.1042
2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316	2.1316
2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578	2.1578
2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726	2.1726
2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540	2.0540
2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657	2.1657
2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107	2.3107
2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987	2.3987
2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741	2.4741
2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138
2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934	2.0934
2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968	2.2968
2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205	2.5205
2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373	2.6373
2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382	2.6382
2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126	2.7126
2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320	2.1320
2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114	2.4114
2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594

RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM

2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234	2.7234
2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625	2.6625
2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199	2.6199
2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609	2.1609
2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872	2.4872
2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784	2.6784
2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642	2.6642
2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456	2.4456
2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161
2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741	2.1741
2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176	2.5176
2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7129	2.7175	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125	2.7125
2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047	2.6047
2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645	2.2645
2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502	2.0502
2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611
2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892	2.1892
2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321	2.2321
2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638
2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893	2.2893
2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023	2.3023
2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874	2.1874
2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914	2.2914
2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355	2.4355
2.5404	2.5405	2.5404	2.5404	2.5404	2.5405	2.5404	2.5404	2.5404	2.5404	2.5404	2.5404	2.5404	2.5405	2.5404	2.5404
2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188	2.6188
2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572	2.6572
2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238	2.7238
2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230	2.4230
2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569	2.6569
2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963	2.7963
2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663	2.8663
2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810
2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608	2.7608
2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431	2.5431
2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088	2.8088
2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882	2.8882
2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290	2.8290
2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800	2.7800
2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894	2.2894
2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249	2.6249
2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667	2.8667
2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436	2.8436
2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992	2.5992
2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367	2.4367
2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030	2.3030
2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594	2.6594
2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810	2.8810
2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558	2.7558
2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4014	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016	2.4016
2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853	2.1853
2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416	2.2416
2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674
2.3065	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066	2.3066
2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418	2.3418
2.3660	2.3661	2.3660	2.3660	2.3661	2.3660	2.3661	2.3660	2.3660	2.3660	2.3660	2.3660	2.3660	2.3660	2.3660	2.3661
2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3784	2.3784
2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661	2.2661
2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636	2.3636
2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038	2.5038
2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240	2.6240
2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034	2.7034
2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390	2.7390
2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004	2.3004
2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934	2.4934
2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299	2.7299

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885	2.8885
2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618	2.9618
2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763
2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362	2.3362
2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158	2.6158
2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898	2.8898
2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809	2.9809
2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255	2.9255
2.8704	2.8705	2.8704	2.8704	2.8705	2.8705	2.8705	2.8704	2.8704	2.8705	2.8705	2.8705	2.8705	2.8704	2.8705	2.8705
2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644	2.3644
2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015	2.7015
2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623	2.9623
2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325	2.9325
2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927	2.6927
2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991	2.4991
2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782	2.3782
2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393
2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763	2.9763
2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698	2.8698
2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840	2.4840
2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662	2.2662
1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461	1.5461
1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835	1.6835
1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189	1.7189
1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675	1.7675
1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130	1.8130
1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347	1.8347
1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673	1.5673
1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933	1.7933
1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672	1.8672
1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374	1.9374
1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900	1.9900
2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169	2.0169
1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926	1.5926
1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526	1.8526
2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256	2.0256
2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141	2.1141
2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636	2.1636
2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452	2.1452
2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140	2.6140
2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396	2.9396
2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294
2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592	2.1592
2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536	2.1536
2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167	2.1167
1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305	1.6305
1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963	1.9963
2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346	2.1346
2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323	2.1323
2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254	2.0254
1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840	1.8840
1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345	1.8345
2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193	2.0193
2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435	2.1435
2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863	2.0863
1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327	1.8327
1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490	1.5490
1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432	1.8432
1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511
1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629
1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748
1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838
1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881
1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511	1.8511
1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821	1.8821
2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710	2.0710

2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.1614	2.161
1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.968
2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.1736	2.173
1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.8629	1.862
1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.9190	1.919
2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.2406	2.240
2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.3178	2.317
2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.322
2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.3347	2.334
1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.8748	1.874
1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.9496	1.949
2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.2748	2.274
2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.3689	2.368
2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.2994	2.299
2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.2672	2.267
1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.8838	1.883
1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.9689	1.968
2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.316
2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.3232	2.323
1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.9827	1.982
1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.9226	1.922
1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.8881	1.888
2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.1784	2.178
2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.3324	2.332
2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.2472	2.247
1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.9272	1.927
1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.8498	1.849
2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.0233	2.023
2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.032
2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.0698	2.069
2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.049
2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.0580	2.058
2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.1384	2.138
2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.032
2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.0558	2.055
2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.2475	2.247
2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.2815	2.281
2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.3637	2.363
2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.3848	2.384
2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.0393	2.039
2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.1075	2.107
2.4435	2.4436	2.4436	2.4436	2.4435	2.4436	2.4436	2.4436	2.4436	2.4435	2.4436	2.4436	2.4436	2.4436	2.4436	2.443
2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.5143	2.514
2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.5504	2.550
2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.5671	2.567
2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.0491	2.049
2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.3162	2.316
2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.4763	2.496
2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.5975	2.597
2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.5150	2.515
2.4838	2.4837	2.4838	2.4838	2.4838	2.4837	2.4837	2.4838	2.4838	2.4837	2.4837	2.4838	2.4837	2.4837	2.4837	2.483
2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.1294	2.129
2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.3680	2.368
2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.548
2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.5531	2.553
2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.3045	2.304
2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.2332	2.233
2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.1402	2.140
2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.3889	2.388
2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.5661	2.566
2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.4703	2.470
2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.1952	2.195
2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.0324	2.032
2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.1116	2.111
2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.1423	2.142
2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.1735	2.173

PURDUE UNIVERSITY AT BROWN

2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247	2.2247
2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081	2.2081
2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669	2.2669
2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272	2.1272
2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491	2.2491
2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764	2.3764
2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200	2.4200
2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087	2.5087
2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623	2.5623
2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554	2.1554
2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640	2.3640
2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900	2.5900
2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826	2.6826
2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423	2.7423
2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602	2.7602
2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264	2.2264
2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743	2.4743
2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836	2.6836
2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833	2.7833
2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005	2.7005
2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644
2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558	2.2558
2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388	2.5388
2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426	2.7426
2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393	2.7393
2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596	2.4596
2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831	2.3831
2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692	2.2692
2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655	2.5655
2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599	2.7599
2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561	2.6561
2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857	2.3857
2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218	2.1218
2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780	2.1780
2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060	2.2060
2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434
2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496	2.2496
2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762	2.2762
2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539	2.3539
2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140	2.2140
2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995	2.2995
2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395	2.4395
2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179	2.5179
2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074	2.6074
2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933	2.6933
2.2330	2.2331	2.2330	2.2331	2.2330	2.2330	2.2331	2.2330	2.2330	2.2330	2.2330	2.2330	2.2330	2.2330	2.2331	2.2330
2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263	2.4263
2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736	2.6736
2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052	2.8052
2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829	2.8829
2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003	2.9003
2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122
2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892	2.5892
2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215	2.8215
2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139	2.9139
2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393	2.8393
2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956	2.7956
2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430	2.3430
2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643	2.6643
2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840	2.8840
2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691	2.8691
2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840	2.5840
2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752	2.4752
2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565	2.3565
2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957	2.6957
2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002	2.9002

2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911	2.7911
2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796	2.4796
2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540	2.1540
2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387	2.2387
2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535	2.2535
2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804	2.2804
2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031	2.3031
2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245	2.3245
2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065	2.4065
2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526	2.2526
2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269	2.3269
2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610	2.4610
2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787	2.5787
2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672	2.6672
2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705	2.7705
2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756	2.2756
2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493	2.4493
2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060	2.7060
2.8778	2.8779	2.8779	2.8778	2.8779	2.8779	2.8779	2.8778	2.8779	2.8778	2.8779	2.8779	2.8779	2.8778	2.8778	2.8779
2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632	2.9632
2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793
2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601	2.3601
2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066	2.9066
2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008	2.9008
2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855	2.9855
2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226	2.9226
2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693	2.8693
2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931	2.3931
2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379	2.7379
2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643	2.9643
2.9360	2.9360	2.9359	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360	2.9360
2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678	2.6678
2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274	2.5274
2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082	2.4082
2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722	2.7722
2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793	2.9793
2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675	2.8675
2.5298	2.5298	2.5298	2.5298	2.5299	2.5299	2.5299	2.5298	2.5298	2.5298	2.5298	2.5298	2.5298	2.5298	2.5298	2.5298
2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537	2.2537
1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322	1.7322
1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349	1.8349
1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694	1.8694
1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216	1.9216
1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980	1.8980
1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073	1.9073
1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618	1.7618
1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017	1.9017
2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258	2.0258
2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059	2.1059
2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625	2.1625
2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902	2.1902
1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945	1.7945
2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100	2.0100
2.1783	2.1783	2.1781	2.1781	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1783	2.1781
2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012	2.3012
2.3426	2.3426	2.3425	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426	2.3426
2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427	2.3427
1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559	1.9559
2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040	2.1040
2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135	2.3135
2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3544	2.3544	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543	2.3543
2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422	2.3422
2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785	2.2785
1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965	1.8965
2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664	2.1664
2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308	2.3308

PURDUE UNIVERSITY CDC 6500

2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246	2.3246
2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024	2.2024
2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455	2.0455
1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077	1.9077
1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922	1.1922
2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409	2.3409
2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674	2.2674
1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930	1.9930
1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342	1.7342
2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242	2.0242
2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353
2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546	2.0546
2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679
2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805	2.0805
2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053	2.1053
2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353	2.0353
2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781	2.0781
2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938	2.1938
2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780	2.2780
2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555	2.3555
2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847	2.2847
2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515	2.0515
2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305	2.1305
2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669	2.3669
2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402	2.4402
2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139	2.4139
2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940	2.3940
2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679	2.0679
2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751	2.1751
2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902	2.4902
2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211	2.4211
2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768	2.4768
2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248	2.3248
2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966	2.0966
2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039	2.2039
2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746	2.3746
2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975	2.3975
2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878	2.1878
2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528	2.1528
2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050	2.1050
2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840	2.2840
2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877	2.3877
2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558	2.3558
2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560	2.1560
2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298	2.0298
2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615	2.1615
2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779
2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940
2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068	2.2068
2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153	2.2153
2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053	2.3053
2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779	2.1779
2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137	2.2137
2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470
2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445	2.2445
2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990	2.2990
2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418	2.6418
2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940	2.1940
2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470	2.2470
2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556	2.4556
2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985	2.5985
2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106	2.6106
2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324	2.6324
2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655	2.2655
2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107	2.5107
2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490	2.5490

RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM

2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989	2.6989
2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700	2.5700
2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446	2.5446
2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938	2.2938
2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804	2.5804
2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065	2.6065
2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311	2.6311
2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4227	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229	2.4229
2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4054	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056	2.4056
2.3063	2.3064	2.3064	2.3064	2.3063	2.3063	2.3064	2.3064	2.3064	2.3064	2.3064	2.3064	2.3064	2.3064	2.3064	2.3063
2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406	2.6406
2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305	2.6305
2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189	2.5189
2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808	2.3808
2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762	2.1762
2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817	2.1817
2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100
2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390
2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679	2.2679
2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850	2.2850
2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786	2.3786
2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100	2.2100
2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819	2.2819
2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202	2.4202
2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986	2.4986
2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202	2.5202
2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715	2.5715
2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2771	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774
2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613	2.3613
2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081	2.5081
2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260	2.7260
2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764	2.7764
2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995	2.7995
2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259	2.3259
2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904	2.5904
2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110	2.7110
2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438	2.8438
2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267	2.7267
2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979	2.6979
2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626	2.3626
2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5549	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548	2.5548
2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765	2.7765
2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918	2.7918
2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681	2.4681
2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078	2.5078
2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798	2.3798
2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781	2.5781
2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988	2.7988
2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815	2.6815
2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792	2.4792
2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013	2.2013
2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397	2.1397
2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1877	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879	2.1879
2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170	2.2170
2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876	2.2876
2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550	2.3550
2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772	2.3772
2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815	2.1815
2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985	2.2985
2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627	2.4627
2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502	2.5502
2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286	2.6286
2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819	2.6819
2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641	2.2641
2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570	2.4570
2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817	2.6817

2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117	2.8117
2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952	2.8952
2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165
2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190	2.3190
2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774	2.5774
2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286	2.8286
2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419	2.9419
2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430	2.8430
2.8057	2.8057	2.8057	2.8057	2.8057	2.8058	2.8057	2.8057	2.8057	2.8057	2.8058	2.8057	2.8057	2.8057	2.8058
2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593	2.3593
2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556	2.6556
2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970	2.8970
2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948	2.8948
2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561	2.5561
2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692	2.4692
2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783	2.3783
2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870	2.6870
2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165	2.9165
2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965
2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867	2.4867
2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785	2.1785
2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326	2.2326
2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293	2.2293
2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364	2.2364
2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518	2.2518
2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208	2.3208
2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225	2.3225
2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390	2.2390
2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911	2.2911
2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390	2.4390
2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644	2.5644
2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958	2.6958
2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492	2.7492
2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434	2.2434
2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815	2.4815
2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852	2.6852
2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814	2.8814
2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630	2.9630
2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816
2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636	2.2636
2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250
2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969	2.8969
2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907	2.9907
2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163	2.9163
2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648	2.8648
2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065	2.3065
2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160	2.7160
2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651	2.9651
2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416	2.9416
2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326	2.6326
2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387	2.4387
2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254	2.3254
2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528	2.7528
2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816	2.9816
2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611	2.8611
2.4773	2.4772	2.4773	2.4773	2.4773	2.4772	2.4773	2.4772	2.4772	2.4772	2.4773	2.4772	2.4773	2.4772	2.4772
2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310	2.2310
1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716	1.8716
1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619	1.9619
1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951
2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080	2.0080
2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282
2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367	2.0367
1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123	1.9123
2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282	2.0282
2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566	2.1566

2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500	2.2500
2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109	2.3109
2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386	2.3386
2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407	2.0407
2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409	2.1409
2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424	2.3424
2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630	2.4630
2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139	2.5139
2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162	2.5162
1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998	1.9998
2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417	2.2417
2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695	2.4695
2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252	2.5252
2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029	2.5029
2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511	2.4511
2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246	2.0246
2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102	2.3102
2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033	2.5033
2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911	2.4911
2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485	2.3485
2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760	2.1760
0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366	0.0366
2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395	2.3395
2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146	2.5146
2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232	2.4232
1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311	1.1311
1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726	1.8726
2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301	2.1301
2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461
2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646	2.1646
2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906
2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078	2.2078
2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466	2.2466
2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461	2.1461
2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045	2.2045
2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922	2.2922
2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756	2.3756
2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999	2.4999
2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477	2.4477
2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681	2.1681
2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763	2.2763
2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930	2.4930
2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142	2.6142
2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482	2.5482
2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334	2.5334
2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120	2.2120
2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377	2.3377
2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132	2.6132
2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503	2.5503
2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056	2.5056
2.4559	2.4559	2.4559	2.4559	2.4557	2.4559	2.4559	2.4559	2.4559	2.4559	2.4559	2.4557	2.4559	2.4559	2.4559	2.4559
2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351	2.2351
2.4143	2.4143	2.4143	2.4144	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143	2.4143
2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138	2.5138
2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218	2.5218
2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951	2.3951
2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104
2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462	2.2462
2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400
2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280	2.5280
2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855	2.4855
2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228	2.3228
2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400	2.1400
2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894	2.1894
2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181
2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514	2.2514

RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM

2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812	2.2812
2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032	2.3032
2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641
2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181	2.2181
2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989	2.2989
2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946
2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769	2.4769
2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644	2.6644
2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011	2.7011
2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684	2.2684
2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946	2.3946
2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384	2.5384
2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091	2.7091
2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947	2.6947
2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429	2.6429
2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148	2.3148
2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912	2.5912
2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213	2.5213
2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714	2.7714
2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037	2.6037
2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328	2.8328
2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484	2.3484
2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681	2.6681
2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938	2.5938
2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929	2.6929
2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621	2.5621
2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4643	2.4644
2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641	2.3641
2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013	2.7013
2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219	2.6219
2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128	2.8128
2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682	2.4682
2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069	2.2069
2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969	2.0969
2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577	2.1577
2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883	2.1883
2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808	2.2808
2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579	2.3579
2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836	2.3836
2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587	2.1587
2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122	2.3122
2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250	2.4250
2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824	2.5824
2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287	2.7287
2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7679	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678	2.7678
2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368	2.2368
2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596	2.5596
2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115	2.6115
2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945	2.6945
2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692	2.8692
2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347	2.8347
2.3068	2.3068	2.3068	2.3068	2.3068	2.3069	2.3069	2.3068	2.3068	2.3068	2.3068	2.3069	2.3068	2.3068	2.3068	2.3068
2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356	2.6356
2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244	2.7244
2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052	2.9052
2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427	2.7427
2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202	2.7202
2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590
2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277	2.7277
2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942	2.7942
2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392	2.8392
2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878	2.6878
2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505	2.5505
2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839	2.3839
2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673	2.7673
2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203	2.8203

2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938	2.6938
2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366	2.5366
2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424	2.1424
2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687	2.1687
2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518	2.1518
2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495	2.1495
2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848	2.1848
2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036	2.3036
2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280	2.3280
2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218	2.2218
2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956	2.2956
2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382	2.4382
2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033	2.6033
2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964	2.5964
2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195	2.7195
2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311	2.2311
2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603	2.4603
2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829	2.6829
2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000	2.8000
2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557	2.7557	2.9557	2.9557	2.9557	2.9557
2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421	2.9421
2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486	2.2486
2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849	2.5849
2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296	2.8296
2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732	2.9732
2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398	2.8398
2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119	2.8119
2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046	2.3046
2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673	2.6673
2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9113	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112	2.9112
2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208	2.9208
2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990	2.6990
2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400	2.4400
2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281	2.3281
2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199	2.7199
2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343	2.9343
2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965	2.7965
2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574	2.4574
2.1808	2.1808	2.1809	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808	2.1808
1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735	1.7735
2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906	2.1906
2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692	2.1692
2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679	2.1679
2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590	2.3590
2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681	2.3681
2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719	2.2719
2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623	2.3623
2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994	2.3994
2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126	2.6126
2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592	2.6592
2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262	2.7262
2.3059	2.3057	2.3059	2.3059	2.3057	2.3057	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059	2.3059
2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674	2.4674
2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226	2.7226
2.8658	2.8658	2.8659	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658	2.8658
2.9818	2.9818	2.9814	2.9819	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818	2.9818
2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891	2.9891
2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215	2.3215
2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107	2.6107
2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914	2.8914
2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969	2.9969
2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060	2.9060
2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597	2.8597
2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504	2.3504
2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974	2.6974
2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680	2.9680

DIRECTORATE OF

2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471	2.9471
2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208	2.7208
2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585	2.4585
2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658	2.3658
2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328	2.7328
2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869	2.9869
2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535	2.8535
2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579	2.4579
2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353	2.2353
2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356	2.0356
2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444	2.0444
2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827	2.0827
2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163	2.1163
2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375	2.1375
2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457	2.1457
2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428	2.0428
2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333	2.1333
2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638	2.2638
2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711
2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368	2.4368
2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647	2.4647
2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744	2.0744
2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495	2.2495
2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623	2.4623
2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011	2.6011
2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602	2.6602
2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653	2.6653
2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069	2.1069
2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568	2.3568
2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013	2.6013
2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721	2.6721
2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389	2.6389
2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784	2.5784
2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324	2.1324
2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314	2.4314
2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517	2.6517
2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331	2.6331
2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675	2.4675
2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800	2.2800
2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450	2.1450
2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644	2.4644
2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640	2.6640
2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862	2.5862
2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474	2.2474
2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123	2.0123
2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764	2.1764
2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991
2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216	2.2216
2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606	2.2606
2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809	2.2809
2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303	2.3303
2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991	2.1991
2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766	2.2766
2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624	2.3624
2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532
2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418	2.5418
2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547	2.5547
2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285	2.2285
2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711	2.3711
2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060	2.6060
2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450	2.7450
2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734	2.6734
2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659	2.6659
2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866	2.2866
2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651	2.4651
2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971	2.5971

2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763	2.6763
2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360	2.6360
2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777	2.5777
2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156	2.3156
2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206	2.5206
2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473	2.6473
2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381	2.6381
2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370	2.5370
2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134	2.4134
2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295	2.3295
2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489	2.5489
2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618	2.6618
2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026	2.6026
2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318	2.4318
2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920	2.1920
2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286	2.1286
2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787	2.1787
2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383	2.2383
2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890	2.2890
2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573	2.3573
2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799	2.3799
2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797	2.1797
2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161	2.3161
2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343	2.4343
2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480	2.5480
2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960	2.7960
2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024	2.6024
2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478	2.2478
2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353	2.5353
2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485	2.5485
2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941	2.6941
2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056	2.6056
2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532	2.5532
2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104	2.3104
2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888	2.6888
2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342	2.6342
3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751	3.0751
2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661	2.6661
2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648	2.6648
2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567	2.3567
2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932	2.7932
2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176	2.6176
2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170	2.6170
2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955	2.6955
2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228
2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797	2.3797
2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044	2.6044
2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754	2.5754
2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943	2.6943
2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292	2.5292
2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611	2.1611
1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968	1.8968
2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354	2.0354
2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622	2.1622
2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553	2.2553
2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070	2.3070
2.3340	2.3339	2.3340	2.3339	2.3339	2.3340	2.3340	2.3340	2.3339	2.3340	2.3339	2.3340	2.3339	2.3340	2.3339	2.3340
2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105	2.0105
2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976	2.2976
2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787	2.4787
2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197	2.6197
2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037	2.7037
2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628	2.7628
2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437	2.1437
2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228	2.5228
2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544	2.6544

FRITZ UNIVERSITÄT BERN

2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985 2.8985
2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509 2.9509
2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248 2.9248
2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454 2.2454

RHRZ UNIVERSITÄT BONN

LEBENSLAUF

Am 12.5.1953 wurde ich in Arolsen/Waldeck geboren. 1955 zogen meine Eltern Paul Hefter und Gerda Hefter geb. Steinke nach Wilden. Dort besuchte ich die Volksschule, wechselte dann zur Realschule im benachbarten Neunkirchen und schließlich zum Gymnasium für Realschulabsolventen in Weidenau über. Am 17.5.71 erwarb ich die allgemeine Hochschulreife. Drei Monate später schrieb ich mich an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn für die Fächer Mathematik und Physik ein. Nach dem Vordiplom schrieb ich eine Diplomarbeit bei Prof. Dr. Reinhard OLIVIER , die sich ebenfalls mit der Dehnung von Sphärenabbildungen beschäftigte. Am 26.11.76 bestand ich die letzte der mündlichen Diplomprüfungen. Seit dieser Zeit habe ich an der vorliegenden Dissertation gearbeitet.